О множествах

Работу выполнила ученица 8 класса ГОУ СОШ № 448

Кобзарева Виктория

Руководитель: Кноп Л. С.

Вступление.

В своей работе я рассказываю о том, *что такое множество* и о способах задания множеств. Далее я объясняю необходимость введения таких понятий как пустое множество и подмножество. Завершается эта часть работы рассмотрением множеств, которые мы встречаем на уроках математики.

Вторая часть работы посвящена алгебре множеств, т.е. действиям, выполняемым над множествами и их свойствами. Алгебра множеств представлена как один из примеров булевой алгебры.

В третьей части работы я обращаюсь к тайнам бесконечности – рассматриваю бесконечные множества. Вот вопросы, которые возникают в связи с этим – как сравнить друг с другом бесконечные множества, равна ли часть целому? Для ответа на эти вопросы множества делятся на счетные и несчетные, вводится понятие мощности множества. Заканчивается работа рассуждениями о том, где больше точек: на длинном или коротком отрезке, на отрезке или в квадрате, то есть затронута тема множеств мощности континуума.

Часть I:

1.1. Что такое множество.

К сожалению, основному понятию теории – понятию множества – нельзя дать строгого определения. Разумеется, можно сказать, что множество – это «совокупность», «собрание», «ансамбль», «коллекция», «семейство», «система» и т.д. Однако все это было бы не математическим определением, а скорее злоупотреблением словарным богатством русского языка.

Для того чтобы определить какое-либо понятие, нужно прежде всего указать, частным случаем какого более общего понятия оно является. Для понятия множества сделать это невозможно, потому что более общего понятия, чем множество, в математике нет.

Поэтому вместо того, чтобы дать определение понятию множества, я проиллюстрирую его на примерах.

Часто приходится говорить о нескольких вещах, объединенных некоторым общим признаком. Так, можно говорить о множестве всех стульев в комнате, о множестве всех атомов на Юпитере, о множестве всех клеток человеческого тела, о множестве всех картофелин в данном мешке, о множестве всех рыб в океане, о множестве всех квадратов на плоскости, о множестве всех точек на данной окружности и т.д.

Предметы, составляющие данное множество, называются его элементами. Для того чтобы указать, что данное множество A состоит из элементов x, y, ..., z, обычно пишут A={x, y, …,z,}

Например, множество дней недели состоит из элементов {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье}, множество месяцев – из элементов {январь, февраль, март. Апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь}, множество арифметических действий – из элементов {сложение, вычитание, умножение, деление}, а множество x^2-2r-24=0 – из двух чисел: -4 и 6, то есть имеет вид {-4,6}.

Фигурные скобки в обозначении множества показывают, что элементы объединены в одно целое – множество А. Тот факт, что элемент х принадлежит множеству А, записывают с помощью знака $\in$ так: х $\in$ А. Если же данный элемент х не принадлежит множеству А, то пишут х $\notin$ А. Например, если А означает множество всех четных натуральных чисел, то 6 $\in$ А, а 3 $\notin$ А. Если А – множество всех месяцев в году, то май $\in$ А, а среда $\notin$ А.

Таким образом, когда мы говорим о множестве, то объединяем некоторые предметы в одно целое, а именно в множество, элементами которого они являются. Основатель теории множеств *Георг Кантор подчеркнул это следующими словами: « Множество есть многое, мыслимое нами как единое».* Собственно говоря, элементы множества могут и не быть реально существующими предметами – в богословских трактатах всерьез изучаются взаимоотношения в множествах архангелов, злых духов и т.д.

Для того чтобы наглядно представить себе понятие множества, академик Н.Н.Лузин предложил следующий образ. Представим прозрачную непроницаемую оболочку, нечто вроде плотно закрытого прозрачного мешка. Предположим, что внутри этой оболочки заключены все элементы данного множества А, и что кроме них внутри оболочки никаких других предметов не находится. Эта оболочка с предметами х, находящимися внутри ее, и может служить образом множества А, составленного из элементов х. Сама же эта прозрачная оболочка, охватывающая все элементы (и ничего другого кроме них), довольно хорошо изображает тот акт объединения элементов х, в результате которого создается множество А.

Если множество содержит конечное число элементов. То его называют конечным, а если в нем бесконечно много элементов, то бесконечным. Так , множество деревьев в лесу конечно, а множество точек на окружности бесконечно.

1.2. Как задают множества.

Возможны различные способы задания множеств. Один из них состоит в том, что дается полный список элементов, входящих в множество. Например, множество учеников данного класса определяется их списком в данном журнале, множество всех стран на земном шаре – их списком в географическом атласе, множество всех костей в человеческом скелете – их списком в учебнике анатомии.

Но этот способ применим только к конечным множествам, да и то далеко не ко всем. Например, хотя множество всех рыб в океане и конечно, вряд ли его можно

задать списком. А уж бесконечные множества никак нельзя определять с помощью списка.

В тех случаях, когда множество нельзя задать при помощи списка, его задают путем указания некоторого характеристического свойства – такого свойства, что элементы множества им обладают, а все остальное на свете не обладает. Например, мы можем говорить о множестве всех натуральных чисел. Тогда ясно, что число 73 принадлежит этому множеству, а число $\frac{3}{4}$ или крокодил не принадлежат. Точно так же $\sqrt{2}$ и планета Сатурн не принадлежат множеству всех рациональных чисел, а $\frac{7}{15}$ принадлежит этому множеству.

Задание множеств их характеристическими свойствами иногда приводит к осложнениям. Может случиться, что два различных характеристических свойства задают одно и то же множество, то есть всякий элемент, обладающий одним свойством, обладает и другим, и обратно. Например, множество толстокожих сухопутных животных, имеющих два бивня, совпадает с множеством толстокожих животных, имеющих хобот, - это множество слонов.

Еще большие трудности при задании множеств их характеристическими свойствами возникают из-за недостаточной четкости обыденного языка, неоднозначности человеческой речи. Большое число промежуточных форм затрудняет разграничение объектов на принадлежащие и не принадлежащие данному множеству. Пусть, например, речь идет о множестве всех деревьев на земном шаре. В первую очередь здесь надо определить, идет ли речь обо всех деревьях, которые существовали и будут существовать на Земле, или о деревьях, существовавших в течение некоторого фиксированного промежутка времени (например, с 1 мая по 1 сентября 1965 года). Но тогда возникает вопрос, как быть с деревьями, спиленными за этот промежуток времени? Кроме того, существует целый ряд промежуточных форм между деревьями и другими растениями, и надо решить, какие из них относятся к множеству деревьев, а какие нет.

Не всегда затруднения с определением состава множества зависят от недостатков языка. Иногда причина лежит гораздо глубже. Приведем следующий пример. Как правило, сами множества не являются своими собственными элементами (например, множество всех натуральных чисел не является натуральным числом, множество всех треугольников не является треугольником и т.д.).

Однако бывают и такие множества, которые содержат себя в качестве одного из своих элементов. Скажем, множество абстрактных понятий само является абстрактным понятием (не правда ли?). Так как такие множества рассматриваются редко, назовем их *экстраординарными*, а все остальные множества – *ординарными*.

Образуем теперь множество А, элементами которого являются все ординарные множества. На первый взгляд кажется, что в этом определении нет ничего

плохого; не видно, почему фраза «множество всех ординарных множеств» хуже, чем фраза «множество всех треугольников». Но на самом деле здесь возникает серьезное логическое противоречие. Попробуем выяснить, каким же является само полученное множество А – ординарным или экстраординарным. Если оно ординарно, то оно входит в себя как один из элементов (мы ведь собрали вместе все ординарные множества). Но тогда по определению оно является экстраординарным. Если же множество А экстраординарно, то по определению экстраординарности оно должно быть своим собственным элементом, а среди элементов множества А есть лишь ординарные множества, экстраординарных множеств мы не брали!

Мы будем в дальнейшем рассматривать лишь множества, которые определены точно и без противоречий и состав которых не вызывает сомнений (такие, как множество всех натуральных чисел, всех квадратов на плоскости и т.д.).

1.3. Пустое множество.

Само название «множество» наводит на мысль, что каждое множество должно содержать много (по крайней мере два) элементов. Но это не так. В математике приходится рассматривать и множества, содержащие только один элемент, и даже множество, не имеющее ни одного элемента. Это множество называют *пустым* и обозначают $\emptyset$.

Примерами пустых множеств могут служить множество лошадей, пасущихся на Луне, множество десятиногих млекопитающих, множество трехлетних гроссмейстеров, множество действительных корней уравнения $x^4+16=0$, множество решений уравнений $2x-5y=1$; $4x-10y=6$.

Зачем же вводят пустое множество? Во-первых, отметим, что когда множество задано своим характеристическим свойством, то не всегда заранее известно, существует ли хоть один элемент с таким свойством. Например, пусть множество А состоит из всех четырехугольников таких, что

а) все их углы прямые,

б) диагонали имеют различную длину.

Для человека, не знающего геометрии, ничего противоречивого в этих требованиях нет. Однако из теоремы о равенстве диагоналей прямоугольника следует, что множество таких четырехугольников пусто. Пусто и множество треугольников, сумма углов которых отлична от 180°. множество квадратных трехчленов, имеющих более двух корней, тоже пусто.

Долго было неизвестно, пусто ли множество всех натуральных чисел n таких, что $n > 2$, а уравнение $x^n + y^n = z^n$ имеет положительные целочисленные решения (в этом состояла знаменитая проблема Ферма). Лишь в 1995 году Э. Уайлс установил, что это множество пусто. До сих пор неизвестно, пусто ли множество цифр, входящих лишь конечное число раз в десятичное разложение числа π (хотя

это число и вычислено с точностью до многих тысяч десятичных знаков, неизвестно, все ли цифры входят в его десятичное разложение бесконечно много раз или какая-нибудь цифра встречается лишь конечное число раз).

1.4. Множества на уроках математики.

Множества могут состоять из самых различных элементов – рыб, домов, квадратов, чисел, точек и т.д. Именно этим объясняется чрезвычайная широта теории множеств и ее приложимость к самым разным областям знания (математике, механике, физике, биологии, лингвистике и т.д.). Для математики особо важную роль играют множества, составленные из «математических» объектов – геометрических фигур, чисел, алгебраических выражений, функций и т.д. Примерами таких множеств могут служить:

а) множество всех натуральных чисел,

б) множество всех целых чисел (положительных, отрицательных и нуля),

в) множество всех рациональных чисел,

г) множество всех действительных чисел,

д) множество всех комплексных чисел,

е) множество площадей правильных многоугольников, вписанных в данный круг, и т.д.

С каждым уравнением связаны два числовых множества. Первым из них является множество чисел, при которых выражения, входящие в уравнение, имеют смысл. Это числовое множество называется *областью допустимых значений* неизвестного. Например, для уравнения $\frac{x}{x^2-4} + \frac{x-1}{x^2-9} = -\frac{1}{3}$ область допустимых значений состоит из всех чисел x, для которых $x^2 - 4 \neq 0$ и $x^2 - 9 \neq 0$, то есть из всех чисел, кроме чисел множества {2, -2, 3, -3}. А для уравнения $\sqrt{-x^2 + x + 12} + x = 2 + \sqrt{10}$ область допустимых значений состоит из чисел, для которых $-x^2+x+12 \geq 0$. Это неравенство выполняется, если $-3 \leq x \leq 4$.

Вторым множеством, связанным с данными уравнением или неравенством, является множество его решений. Когда уравнение задано, множество M его корней определено характеристическим свойством – тем, что числа x, входящие в M, удовлетворяют данному уравнению. После того, как уравнение решено, множество M задано списком (если оно конечно), например, свойством, что все его элементы – целые числа.

В то время как множество решений уравнения состоит обычно из нескольких чисел или из нескольких последовательностей чисел, множество решений неравенства, как правило, сплошь заполняет некоторые участки множества действительных чисел. Например, неравенство $4 - x^2 \geq 0$ выполняется на отрезке $-2 \leq x \leq 2$, обозначаемое [-2; 2], а неравенство $(4 - x^2)(x - 3)(x - 5) \geq 0$ -на

отрезках $-2 \le x \le 2$ и $3 \le x \le 5$. Если вместо не строгих взять строгие неравенства, то получатся отрезки с отброшенными концами, так называемые *числовые промежутки*. Например, множество решений неравенства $(4 - x^2)(x - 3)(x - 5) > 0$ состоит из промежутков $-2 < x < 2$ и $3 < x < 5$, обозначаемые $(-2;2)$ и $(3;5)$. Концы -2, 2, 3, 5 этих промежутков не удовлетворяют неравенству. Встречаются в качестве решений неравенства и более сложные множества. Например, решением неравенства $\frac{x-1}{4-x} \ge 0$ является множество чисел x таких, что $1 \le x < 4$, обозначаемое [1; 4]. Здесь один конец отрезка (а именно 1) принадлежит множеству решений, а другой – число 4 – не принадлежит ему.

Так как каждое действительное число изображается точкой на числовой оси, числовые множества можно изображать как некоторые множества точек на прямой. Например, на рис.1 а изображено множество чисел x таких, что $-4 \le x \le 1$, а на рисунке 1 б изображено множество таких чисел x, что $-2 < x < 3$.

а) б)

Рис. 1

Особенно удобно геометрическое изображение множеств, состоящих из пар или троек чисел. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 25$ задает множество M пар чисел (x; y), при подстановке которых уравнение обращается в тождество. Пары чисел (-5; 0), (3; -4) принадлежит множеству M, так как $(-5)^2 + 0^2 = 25$, $3^2 + (-4)^2 = 25$, а пара чисел (1; 6) не принадлежит множеству M, так как $1^2 + 6^2 = 37 \neq 25$. Однако такое описание множества M не очень наглядно. Чтобы описать это множество нагляднее, воспользуемся методом координат. Выберем на плоскости систему декартовых координат (это те самые координаты, которые изучаются в школе). Тогда каждой паре чисел (x; y) соответствует точка A на плоскости с координатами x и y. А каждой точке плоскости – пара x и y у ее координат.

Если изобразить на плоскости все пары чисел (x; y),для которых $x^2 + y^2 = 25$,то легко заметить, что они ложатся на одну и ту же линию, а именно на окружность радиуса 5 с центром в начале координат . Если вспомнить теорему Пифагора, то сразу станет ясно, что множество всех точек A (x; y), для которых $x^2 + y^2 = 25$, совпадает с множеством точек этой окружности.

Неравенства, содержащие два неизвестных, обычно задают не линии, а целые области на плоскости. Например, неравенство $x^2 + y^2 \le 25$ задает на плоскости множество точек, расстояние которых от начала координат не превосходит 5, то есть множество точек круга радиуса 5 с центром в начале координат. При этом сама окружность входит в указанное множество. А неравенство $x^2 + y^2 < 25$ задает тот же круг, но без граничной окружности.

В геометрии мы сталкиваемся с двумя типами множеств. Во-первых , теоремы геометрии обычно говорят о свойствах некоторого множества геометрических фигур. Например, теорема о том, что диагонали параллелограмма делят друг друга пополам, касается множества всех параллелограммов. Во-вторых. Сами геометрические фигуры являются множествами, состоящими из входящих в них точек. Мы можем поэтому говорить о множестве всех точек данного круга, о множестве всех точек данного конуса и т.д.

1.5. Подмножества.

Познакомимся с понятием подмножества. Оно возникает каждый раз, когда приходится рассматривать некоторое множество не самостоятельно, а как часть другого. Более широкого множества. Именно, говорят, что множество B является подмножеством другого множества A, если каждый элемент из B является вместе с тем и элементом множества A. В этом случае пишут $A \subset B$.

Если геометрическая фигура X является частью геометрической фигуры Y, то множество точек фигуры X есть подмножество множества точек фигуры Y (рис.2)

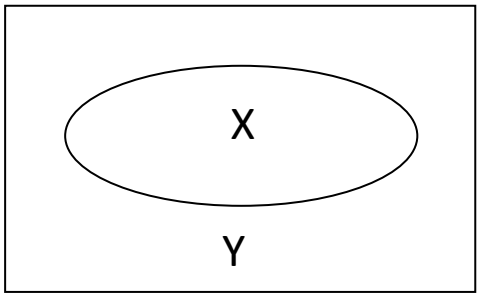

Рис.2

В геометрии также часто приходится иметь дело с подмножествами некоторых множеств геометрических фигур. Возьмем, например, следующие множества: множество A состоит из всех четырехугольников; множество B состоит из всех трапеций; множество C состоит из всех параллелограммов; множество D состоит из всех прямоугольников; множество E состоит из всех квадратов. В этом списке фигура каждого следующего типа является частным случаем фигуры предыдущего типа (трапеция – частный случай четырехугольника, параллелограмм – частный случай трапеции и т.д.). Но это и означает, что каждое следующее множество является подмножеством предыдущего: $A \supset B \supset C \supset D \supset E$. Точно так же в следующем списке каждое следующее множество является подмножеством предыдущего: множество всех действительных чисел; множество всех рациональных чисел; множество всех целых чисел; множество всех натуральных чисел. Во многих случаях, чтобы выделить в данном множестве некоторое подмножество, добавляют к характеристическому признаку множества то или инее дополнительное условие. Например, подмножество натуральных чисел выделяется в множестве целых чисел добавлением условия $n > 0$, а подмножество равносторонних треугольников в множестве всех треугольников – добавлением условия a = b = c.

Часть II:

2.1. Пересечение множеств.

В сентябре 1887 года знаменитому сыщику Шерлоку Холмсу понадобилось выяснить название одного парусного судна. Он знал об этом корабле не слишком много: в январе или феврале 1883 года оно было в Пондишери, в январе 1885 года – в Данди, а сейчас стояло в Лондонском порту. Пользуясь этими данными, он все-таки установил название корабля. Для этого достаточно было сравнить три множества: множество парусников, бывших в указанное время в Пондишери, множество парусников, находившихся в январе 1885 года в Данди, и множество парусников, находившихся сейчас в Лондоне. Оказалось, что только одно судно входило во все три множества – американский корабль «Одинокая звезда». А так как Шерлок Холмс полагал к тому же, что преступники родом из Америки, то круг замкнулся, и преступление было раскрыто.

Искать общие элементы множеств приходится не только сыщикам.

Множество, состоящее из общих элементов нескольких множеств A, B, C, … , называется пересечением этих множеств или их произведением. Пересечение двух множеств A и B обозначается AB или $A \cap B$. Итак, пересечением нескольких множеств A, B, C, … называют новое множество, содержащее те и только те элементы, которые входят в каждое из множеств A, B, C, …

Например, пусть ученики данной школы участвуют в четырех спортивных секциях: футбольной, плавания, шахматной и бокса. Пересечение множеств участников каждой секции состоит из спортсменов-универсалов, которые могут и забить пенальти, и переплыть широкую реку, и создать грозную атаку на короля противника, и отразить нападение хулигана.

Иногда приходится пересекать множества геометрических фигур или чисел. Например, множество всех квадратов является пересечением множества всех прямоугольников с множеством всех ромбов. Множество правильных треугольников является пересечением множества всех треугольников с множеством правильных многоугольников. Пересечением множества натуральных чисел, делящихся на 3, является множество натуральных чисел, делящихся на 6.

Решение систем уравнений и неравенств, по сути дела, сводится к отысканию пересечения некоторых множеств. Пусть, например, надо решить систему уравнений: $x^2 + y^2$=25; $x + y = 7$. С точки зрения алгебры у нас задача найти все пары чисел (x; y), при подстановке которых в оба уравнения системы получаются тождества. Но уравнения системы можно рассматривать по отдельности. Обозначим через M множество всех пар чисел (x; y), удовлетворяющих первому из наших уравнений, а через N – множество всех пар чисел (x; y), удовлетворяющих второму уравнению. Тогда решениями системы будут все пары чисел, принадлежащие как множеству M, так и множеству N. Иными словами, множеством решений системы является пересечение множеств M и N.

Это замечание лежит в основе геометрического метода решения систем – строят линии, выражаемые каждым из уравнений системы, и находят их пересечение. Например, мы уже знаем, что точки A(x; y), координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 25$, лежат на окружности радиуса 5 с центром в начале координат. А уравнение x + y = 7 –это уравнение прямой, отсекающей на обеих координатных осях отрезки длины 7. Если начертить эти линии, то окажется, что они пересекаются в двух точках: A(4; 3) и B(3; 4). Рассмотрим теперь систему неравенств: $y \geq x^2; y \leq 8 - x^2$. Множество M решений неравенства $y \geq x^2$ состоит из точек A(x; y),лежащих на параболе $y = x^2$ и выше этой параболы. А множество N решений неравенства $y \leq 8 - x^2$ состоит из точек плоскости, лежащих на параболе $y = 8 - x^2$ и ниже этой параболы (рис.3). На рис. 3 множество M заштриховано горизонтальными линиями, а множество N – вертикальными линиями. Решением системы неравенств является пересечение P множеств M и N. На рис. 3 оно отмечено двойной штриховкой. При этом точки границы множества P принадлежат этому множеству.

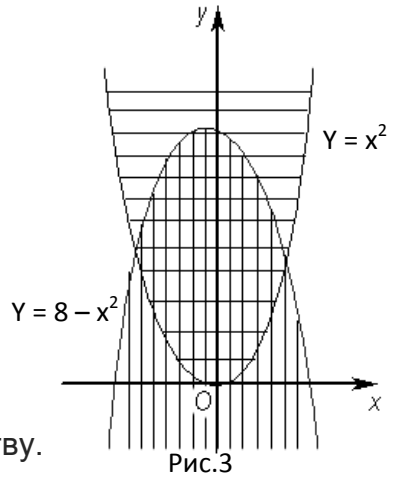

Рис.3

А теперь путем изучения пересечения множеств покажем, что иррациональное уравнение $\sqrt{2 + x - x^2} + \sqrt{8x - x^2 - 15} = 7$ не имеет решений. Выясним, при каких значениях x имеют смысл радикалы, входящие в это уравнение. Радикал $\sqrt{2 + x - x^2}$ имеет смысл, если $2 + x - x^2 \geq 0$. Решая это неравенство, получим, что $-1 \leq x \leq 2$.Точно также обнаруживаем, что радикал $\sqrt{8x - x^2 - 15}$ имеет смысл, лишь если $3 \leq x \leq 5$. Но отрезки $-1 \leq x \leq 2$ и $3 \leq x \leq 5$ не имеют общих точек, их пересечение пусто. Поэтому ни одно значение x не может удовлетворять уравнению.

2.2. Сложение множеств.

Еще чаще, чем пересекать множества, приходится объединять их. Уже первоклассник, складывая три палочки и две палочки, объединяет два множества. Вообще, действие сложения натуральных чисел связано с подсчетом числа элементов объединения двух множеств. Но здесь надо иметь в виду одну тонкость. Пусть есть два сплава. Один сплав содержит железо, углерод, ванадий и марганец, а второй – железо, углерод, хром и никель. В каждый входят по 4 химических элемента, но если мы сплавим их вместе, то в новый сплав войдут только 6 элементов: железо, углерод, ванадий, марганец, хром и никель. Дело в

том, что железо и углерод были в обоих сплавах, то есть объединяемые множества элементов имели непустое пересечение. Поэтому будет правильнее сказать, что сложение натуральных чисел связано с объединением непересекающихся множеств.

Если же пересечение множеств не пусто, то в их объединении повторяющиеся элементы считаются лишь по одному разу. Таким образом, суммой нескольких множеств A, B, … называют новое множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят хоть в одно из слагаемых множеств. Сумму множеств A и B обычно обозначают A+B или $A \cup B$. На рис.4 изображено объединение множества A точек круга $Г_1$ и множества B точек круга $Г_2$.

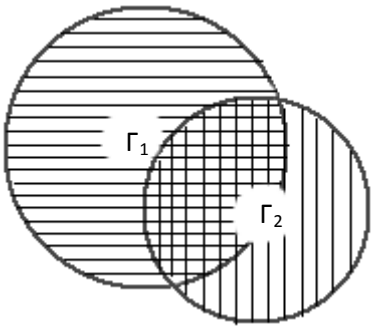

Рис.4

Если некоторые элементы входят не в одно, а в несколько слагаемых множеств, в сумму они все равно входят один раз.

Поэтому для конечных множеств число элементов суммы может оказаться меньше, чем сумма чисел элементов слагаемых.

Иногда сумма состоит из бесконечного числа слагаемых множеств. Например, обозначим через A_n множество всех положительных дробей со знаменателем n: $A_1 = \{\frac{m}{2}\}$, $A_2 = \{\frac{m}{2}\}$, …, $A_n = \{\frac{m}{n}\}$, … Суммой всех множеств A_1, A_2, …, A_n, … является множество всех положительных дробей, то есть дробей вида $\frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа.

Поговорим теперь о сложении множеств в алгебре.

В одном из своих рассказов известный американский писатель Эдгар По пишет:

«Я никогда не встречал математика, который не держался бы как за Символ Веры за то, что $x^2 + px + q$ абсолютно и безусловно равно нулю. Скажите одному из этих джентльменов, если вам угодно, в виде опыта, что, на ваш взгляд, могут существовать случаи, когда $x^2 + px + q$ не целиком равно нулю, и, втолковав ему то, что вы разумеете, возможно скорее спасайтесь из пределов его досягаемости, так как, без сомнения, он попытается вас поколотить».

Разумеется, читатель понимает, что $x^2 + px + q$ может быть равно нулю при одних значениях x и отличаться от нуля при других. Но нас интересует иной вопрос: почему математики всегда стараются записать уравнение так, чтобы одна его

часть была равна нулю? Чтобы это стало яснее, рассмотрим такое уравнение: $x^2(x^2 -7) = -12$. Из того, что произведение двух выражений равно -12, трудно вывести что-либо о величине каждого из этих выражений. Поэтому решать уравнение в таком виде весьма затруднительно. А если перенести -12 в левую часть уравнения и разложить получившееся выражение на множители, то получим уравнение $(x^2 – 4)(x^2 – 3) = 0$. Теперь уже можно применить известное рассуждение: *для того чтобы произведение было равно нулю, надо, чтобы хоть один из множителей был равен нулю*.

Поэтому решение уравнения сводится к решению двух уравнений: $x^2 – 4 = 0$ и $x^2 – 3= 0$. Но в отличие от случая решения системы уравнений здесь надо искать не числа, которые удовлетворяют сразу обоим уравнениям, а числа, которые удовлетворяют хотя бы одному из двух уравнений. Иными словами, нам надо теперь искать не пересечение, а объединение множеств корней. Решая первое уравнение, получим корни $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, а решая второе уравнение, находим еще два корня: $x_3 = \sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{3}$. Объединяя множества {2, -2} и $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$, получаем множество корней $\{2, -2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ заданного уравнения. Точно так же уравнение $(x^2 + y^2 - 37)(y - x -7) = 0$ задает множество, состоящее из окружности с уравнением $x^2 + y^2 – 37 = 0$ и прямой, имеющей уравнение $y–x–7=0$ (рис.5).

Если бы вместо этого уравнения была задана система уравнений $x^2 + y^2 – 37 = 0$; $y - x – 7 = 0$, то она задавала бы не всю фигуру, изображенную на рис.5, а лишь две точки A(-6; 1) и B(-1; 6), в которых прямая пересекает окружность.

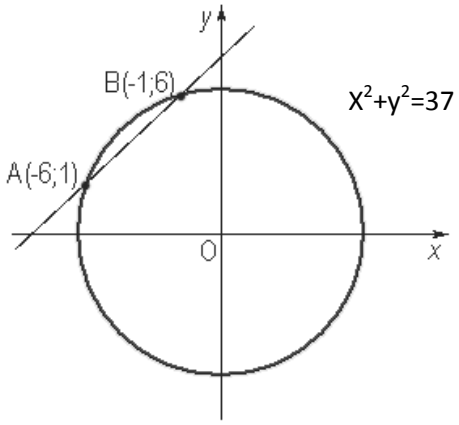

Рис.5

2.3. Разбиение множеств.

Вообще говоря, слагаемые множества могут иметь общие элементы. Однако часто бывает, что некоторое множество является суммой своих подмножеств, никакие два из которых не имеют общих элементов (или, как обычно говорят, не пересекаются). В этом случае говорят, что множество A разбито на непересекающиеся подмножества.

Разбиение на подмножества часто используется для классификации объектов. Например, когда составляют каталог книг в библиотеке, то все множество книг разбивают на книги беллетристического характера, книги по общественно-политическим наукам, по естественным наукам и т.д.

В биологии все множество животных разбивается на типы, типы – на классы, классы – на отряды, отряды – на семейства, семейства – на роды, а роды – на виды.

При разбиении множества на подмножества часто используют понятие эквивалентности элементов. Для этого определяют, что значит «элемент x эквивалентен элементу y», после чего объединяют эквивалентные элементы в одно подмножество. Однако не всякое понятие эквивалентности годится для такого разбиения. Например, назовем двух людей эквивалентными, если они знакомы друг с другом. Такое определение эквивалентности окажется неудачным. Ведь может случится, что человек X знаком с человеком Y, человек Y знаком с человеком Z, а люди X и Z друг с другом незнакомы. Тогда нам придется сначала отнести в одно подмножество людей X и Y (они друг с другом знакомы), потом в то же подмножество включит и Z (он знаком с Y), и у нас в одном подмножестве окажутся незнакомые друг с другом X и Y. Чтобы не было таких неприятностей, нужно, чтобы для понятия эквивалентности выполнялись следующие три условия:

а) каждый элемент сам себе эквивалентен;

б) если элемент x эквивалентен элементу y, то элемент y эквивалентен элементу x;

в) если элемент x эквивалентен элементу y, а элемент y эквивалентен элементу z, то элемент x эквивалентен z.

Можно доказать, что выполнение этих условий необходимо и достаточно для того, чтобы множество A можно было разбить на подмножества эквивалентных между собой элементов (и притом так, что разные подмножества не имеют общих элементов).

Например, назовем два целых числа x и y эквивалентным, если их разность – четное число. Легко проверить, что при этом выполняются все три условия а)-в). Объединяя эквивалентные целые числа, мы разобьем множество всех целых чисел на два подмножества: множество четных чисел и множество нечетных чисел.

2.4. Вычитание множеств.

Вообще, разностью двух множеств A и B называют новое множество, обозначаемое A – B или A \ B, в которое входят все элементы множества A, не принадлежащие B.

Мы видим, что для того, чтобы из множества A можно было вычесть множество B, совершенно не обязательно, чтобы множество B было частью множества A – вычитание B из A сводится к удалению из A общей части A и B: A – B = A – AB.

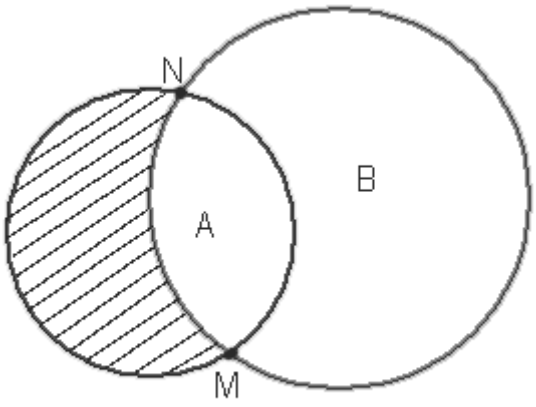

Рис.6

Если А – множество точек первого круга на рис.6,а В – множество точек второго круга, то их разностью является множество точек заштрихованной серповидной фигуры (без дуги MN). Если А – множество всех учеников данного класса какой-либо школы, а В – множество всех девочек, учащихся в этой школе, то А –В – множество всех мальчиков, которые учатся в данном классе этой школы. В случае, когда В является частью множества А, А – В называют дополнением к множеству В в А и обозначают B'_A (разумеется, одно и то же множество В имеет разные дополнения в разных содержащих его множествах А). Например, дополнением множества четных чисел в множестве всех целых чисел является множество нечетных чисел. Дополнением множества всех квадратов в множестве прямоугольников является множество всех прямоугольников с неравными сторонами. А дополнением того же множества квадратов в множестве всех ромбов является множество ромбов с неравными диагоналями.

Если все множества рассматриваются как подмножества универсального множества I, то обычно под дополнением множества В понимают его дополнение в I. В этом случае вместо B'_I пишут просто B'.

2.5. Алгебра множеств.

Мы познакомились с основными действиями над множествами – сложением, вычитанием и умножением (пересечением) множеств. Эти действия обладают целым рядом свойств, напоминающих свойства действий над числами. Как известно, вся алгебра многочленов построена на немногих законах действий над числами, которые выражаются следующими равенствами:

а) a + b = b + f (коммутативность сложения);

б) (a + b) + c = a + (b + c) (ассоциативность сложения);

в) a + 0 = a (свойства нуля);

г) a + (-a) = a – a = 0 (свойство противоположного элемента);

д) ab = ba (коммутативность умножения);

е) (ab)c = a(bc) (ассоциативность умножения);

ж) a(b + c) = ab + ac(дистрибутивность умножения относительно сложения);

з) a * 1 = a (свойство единицы).

Большинство этих свойств действий над числами сохраняется и для действий над множествами. Например, ясно, что для любых двух множеств имеем A + B = B + A (A + B и B + A обозначают одно и то же множество, в которое входят все элементы из A и из B и не входят никакие другие элементы). Точно так же ясно, что (A + B) + C = A + (B + C) – оба множества составлены из всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A, B и C. Так же доказывается, что AB = BA и (AB)C = A(BC) (множества AB и BA состоят из общих элементов множеств A и B, а множества (AB)C и A(BC) – из общих элементов множеств A,B и C).

Несколько сложнее доказать дистрибутивность умножения множеств относительно сложения, то есть выполнение равенства A(B + C)= AB + AC. Строгое логическое доказательство этого равенства несложно, но несколько кропотливо. Мы ограничимся поэтому двумя рисунками, поясняющими это равенство(рис.7). На первом из этих рисунков заштриховано пересечение множества A с множеством B + C, а на втором – пересечения A с B и A с C.

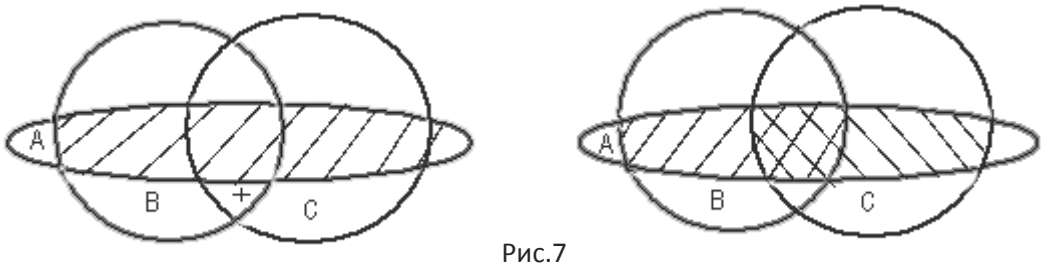

Рис.7

Роль нуля и единицы в действиях над множествами играют множества ∅ (пустое множество) и I (универсальное множество). Именно, справедливы равенства A + ∅ = A, A * ∅ = ∅, A * I = A, соответствующие равенствам a + 0 = a, a * 0 = 0, a * 1 = a для чисел.

Таким образом, сложение и умножение множеств обладают теми же свойствами, что и сложение и умножение чисел.

Поэтому все формулы алгебры многочленов, в которые входят лишь действия сложения и умножения, остаются справедливыми и для множеств. Например, тождеству $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ соответствует тождество $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$, где положено $A^2 = A*A$ и 2AB = AB + AB.

Но алгебра множеств имеет и своеобразные черты. Ее основное своеобразие состоит в том, что если одно из множеств A и B является подмножеством другого, то формулы для суммы и произведения множеств упрощаются, а именно: если A ⊂ B, то A + B = B и AB = A. Это сразу становится ясно из рис. 8.

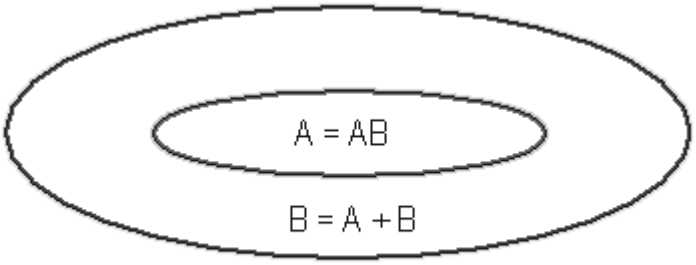

Рис.8

В частности, так как $A \subset B$, то $A + A = AA = A$, а так как $A \subset I$, то $A + I = I$.

Это позволяет упростить формулы алгебры множеств. Например, так как $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB \subset A$, то $A^2 + 2AB = A + 2AB = A$ и формула принимает вид $(A + B)^2 = A + B$. Вообще, в алгебре множеств не имеет смысла говорить о степенях, так как для любого n имеем $A^n = A$.

Покажем теперь, что для множеств есть и второй «распределительный закон», которого нет для чисел. Он выражается формулой $A + BC = (A + B)(A + C)$. Чтобы доказать его, достаточно раскрыть справа скобки по правилу и заметить, что множества AB и AC являются подмножествами в A: $AC \subset A$ и $AB \subset A$. Кроме того, $A = A$, а поэтому $AA + AC + BA + BC = A + BC$. Отметим, далее, что операция вычитания множеств уже не похожа по своим свойствам на операцию вычитания чисел. Для любых трех чисел a, b, c верно равенство $a + (b – c) = (a + b) – c$. А для трех множеств A, B, C, вообще говоря, $A + (B – C) \neq (A + B) – C$. Дело в том, что при сложении множеств повторяющиеся элементы берутся только один раз, а вычитать можно и множество, не содержащееся в уменьшаемом. Поэтому, если, например, все три множества A, B, C совпадают, $A = B = C$, то $A + B = A$ и потому $(A + B) – C = = A – A = \emptyset$ - пустое множество, а $A + (B – C) = A + \emptyset = A$.

В теории множеств есть еще операция, отсутствующая в обычной алгебре. Это операция перехода от данного множества A к его дополнению $A' = I – A$. Ясно, что множества A и A’ не пересекаются, а в сумме составляют все универсальное множество I. Таким образом, $AA' = \emptyset$ и $A + A' = I$. Кроме того, ясно, что $\emptyset' = I$ (дополнение пустого множества совпадает с универсальным множеством) и $I' = \emptyset$. Далее, имеет место равенство $(A')' = A$ (рис. 9).

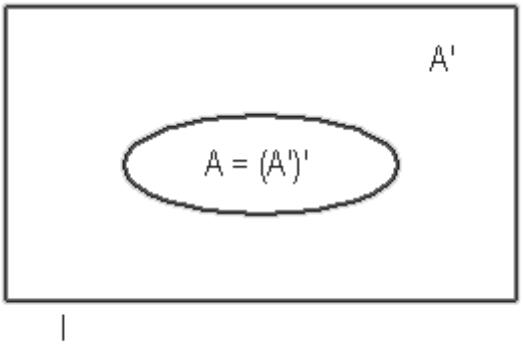

Рис.9

Покажем теперь, что если A ⊂ B, то A’ ⊃ B’. В самом деле, чем больше само множество, тем меньше элементов останется в его дополнении. На рис. 10 универсальное множество I изображено в виде прямоугольника, а множества A и B – в виде кругов. Дополнение к множеству A состоит из точек прямоугольника, лежащих вне меньшего круга, а дополнение к множеству B – из точек прямоугольника, лежащих вне большого круга. Ясно, что A’ ⊃ B’.

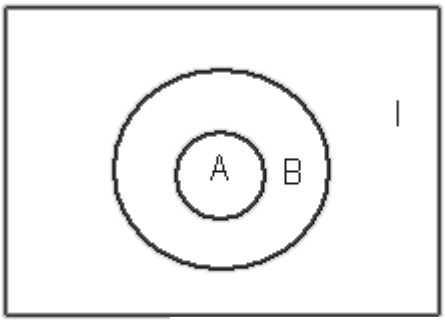

Рис.10

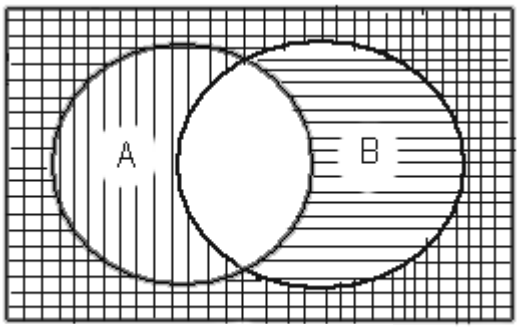

Рис.11

Несколько сложнее доказываются следующие формулы: (A + B)’ = A’B’ и (AB)’ = A’ + B’. На рис. 11 дополнение к множеству A заштриховано горизонтальными линиями, а дополнение к множеству B – вертикальными линиями. Дополнение к множеству A + B состоит из точек прямоугольника, не попавших ни в один из кругов. Это как раз точки, лежащие в области, покрытой обеими штриховками, то есть точки из A’B’. Поэтому ясно, что (A + B)’ = A’B’. Точно так же этот рисунок иллюстрирует и формулу (AB)’ = A’ + B’.

Мы установили ряд свойств действий над множествами. Ради удобства приведем список этих свойств (как обычно, через ∅ мы обозначаем пустое множество, через I – универсальное множество, через A’ – дополнение множества A в универсальном множестве).

1) A ⊂ A.
2) Если A ⊂ B и B ⊂ C, то A = B.
3) Если A ⊂ B и B ⊂ C, то A ⊂ C.
4) ∅ ⊂ A.
5) A ⊂ I.
6) $A + B = B + A$.
7) $AB = BA$.
8) $A + (B + C) = (A + B) + C$.
9) $A(BC) = (AB)C$.

10) $A + A = A$.

11) $AA = A$.

12) $A(B + C) = AB + AC$.

13) $A + BC = (A + B)(A + C)$.

14) $A + \emptyset = A$.

15) $AI = A$.

16) $A + I = I$.

17) $A\emptyset = \emptyset$.

18) Соотношение $A \subset B$ эквивалентно каждому из соотношений $A + B = B, AB = A$.

19) $A + A' = I$.

20) $AA' = \emptyset$.

21) $\emptyset' = I$.

22) $I' = \emptyset$.

23) $(A') = A$.

24) Соотношение $A \subset B$ эквивалентно $B' \subset A'$.

25) $(A + B)' = A'B'$.

26) $(AB)' = A' + B'$.

Отметим следующее замечательное «соотношение двойственности». Если в каждом из свойств 1)-26) заменить друг на друга символы «⊂» и «⊃», «∅» и «I», «+» и «*», то в результате получится снова одно из этих свойств. Например, таким путем из свойства 6) получается свойство 7), из свойства 12) – свойство 13) и т.д.

Отсюда вытекает, что каждой теореме, которая может быть выведена из свойств 1)-26), соответствует другая «двойственная» ей теорема, получающаяся из первой посредством указанных перестановок символов.

Разумеется, запомнить все свойства 1)-26) не слишком легко. Но это и не нужно. Дело в том, что можно ограничиться двумя основными операциями: сложением множеств и образованием дополнения, потребовав, чтобы выполнялись следующие три соотношения:

а) A + B = B + A,

б) (A + B) + C = A + (B + C),

в) (A’ + B’)’ + (A’ + B)’ = A.

Определим теперь действие умножения AB, соотношение включения A ⊂ B и множества I, ∅ формулами

г) AB по определению равно (A’ + B’)’;

д) A ⊂ B по определению означает, что A + B = B;

е) I = A + A’, ∅ = I’.

Тогда все свойства 1)-26) вытекают из формул а)-е).

2.6. Булевы алгебры.

В математике встречаются и другие объекты, кроме множеств, для которых определены действия сложения и умножения, удовлетворяющие условиям 1)-26). Такие системы объектов изучил в 1827 году английский математик Буль (отец писательницы Этель Лилиан Войнич – автора знаменитой книги «Овод»). Поэтому такие системы назвали *булевыми алгебрами*. Но когда это название уже укоренилось, выяснилось, что Буль имел предшественников – в 1685 году братья Бернулли изучали «алгебру» с теми же законами.

Совпадение интересов братьев Бернулли и Буля вполне понятно: все они интересовались алгеброй логики, возможностью представить в алгебраической форме рассуждения, высказывания. А булевы алгебры специально приспособлены к этой цели. Высказыванием в математической логике называют предложение, которое может быть верно или ложно. При этом в логике не интересуются вопросом, верно или ложно данное высказывание на самом деле. Там обсуждают лишь проблему, по каким правилам можно из данных высказываний получать более сложные и как из знания истинности или ложности исходных высказываний выводить истинность или ложность сложных высказываний.

Над высказываниями можно делать следующие операции:

1) Отрицание – замена данного высказывания X противоположным высказыванием $\overline{X}$, которое истинно, если данное высказывание ложно, и ложно, если высказывание X истинно.

2) Конъюнкция – образование из данных двух высказываний X и Y третьего высказывания X ∧ Y, истинного лишь в случае, если истинны оба высказывания X и Y.

3) Дизъюнкция – образование из данных двух высказываний X и Y третьего высказывания X ∨ Y, истинного в случае, когда истинно хоть одно из данных высказываний.

4) Импликация – образование из высказываний X и Y третьего высказывания $X \to Y$, ложного лишь в случае, когда X истинно и Y ложно.

Во многих случаях высказывание состоит в том, что некоторый элемент x принадлежит подмножеству A некоторого универсального множества I. В этом случае операции 1)-4) над высказываниями соответствуют известным нам операциям над множествами. Например, отрицание высказывания «$x \in A$» есть высказывание «$x \in A'$». Таким образом, взятию дополнения A соответствует отрицание высказывания «$x \in A$». Точно так же операции пересечения множеств A и B соответствует конъюнкция высказываний «$x \in A$» и «$x \in B$», операции сложения множеств – дизъюнкция высказываний и соотношению $A \subset B$ – импликация высказываний «$x \in A$» и «$x \in B$». При этом высказывание «$x \in I$» всегда истинно, а высказывание «$x \in \emptyset$» всегда ложно.

Отмеченная связь делает естественным предположение, что законы 1)-26) верны не только для множеств, но и для высказываний, если только понимать $A \cap B$ как конъюнкцию высказываний, $A \cup B$ – как их дизъюнкцию, A' – как отрицание высказывания A, $A \subset B$ – как импликацию высказываний, I – как всегда истинное, а $\emptyset$ - как всегда ложное высказывание. Оказалось, что это предположение верно – высказывания образуют булеву алгебру относительно операций 1)-4). Но булевы алгебры можно строить не только из высказываний.

Интересный пример булевой алгебры получается, если рассмотреть все натуральные делители натурального числа N, которое является произведением нескольких различных простых чисел. В качестве операции сложения делителей выберем образование наименьшего общего кратного этих делителей, а в качестве операции умножения – образование их наибольшего общего делителя. Дополнением делителя n назовем число $n' = \frac{N}{n}$. Наконец, скажем, что $n \subset m$, если m делится на n. Нетрудно проверить, что выведенные операции удовлетворяют условиям 1)-26) из пункта «Алгебра множества», причем роль пустого множества $\emptyset$ играет число 1, а роль универсального множества I – число N.

Если, например. Взять N = 30, то булева алгебра будет состоять из чисел {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}. «Сумма» делителей 2 и 5 равна 10, а их «произведение» равно 1. Делителем, «обратным» делителю 3, является 10, 3' = 10. Наконец, $5 \subset 15$, так как 15 делится на 5.

Часть III.

3.1. Тайны бесконечности.

Не будет преувеличением сказать, что всю математику пронизывает идея бесконечности. Как правило, в математике интересуются не отдельными объектами (числами, геометрическими фигурами), а целыми классами таких объектов: совокупностями всех натуральных чисел, всех треугольник и т.д. А такие совокупности состоят из бесчисленного множества отдельных элементов.

Поэтому математики и философы всегда интересовались понятием бесконечности. Этот интерес возник с того самого момента, когда стало ясно, что за каждым натуральным числом идет следующее, то есть что числовой ряд бесконечен. Но уже первые попытки изучения бесконечности привели к многочисленным парадоксам.

Например, греческий философ Зенон, используя понятие бесконечности, доказывал невозможность движения. В самом деле, говорил он, для того чтобы стрела пролетела какой-то путь, сначала она должна сделать половину пути. Но прежде чем сделать полпути, надо пролететь четверть пути, восьмую часть пути и т.д. Так как процесс деления пополам никогда не кончится (вот она, бесконечность!), то стрела никогда не сможет сдвинуться с места. Точно так же он доказывал, что быстроногий Ахиллес никогда не догонит медлительную черепаху.

Из-за таких парадоксов и софизмов древнегреческие математики отказывались иметь дело с бесконечностью, изгоняли ее из математических рассуждений. Некоторые философы считали, что все геометрические фигуры состоят из конечного числа мельчайших неделимых частиц (атомов). Атомистическая теория легко устраняет парадоксы Зенона, поскольку в ней не допускается бесконечное деление – делить можно лишь до атомов, далее не делимых. Однако тут возникли новые трудности. Нельзя разделить пополам отрезок, если он состоит из нечетного числа неделимых. Круг тоже нельзя разделить на две равные части: центр будет принадлежать только одной из частей, а это противоречит их равенству.

Надо сказать, споры о бесконечности протекали порою довольно остро. Так, известный греческий философ Платон с такой непримиримостью относился к атомистической теории Демокрита, что повсюду разыскивал рукописи сочинений этого автора и уничтожал их – до изобретения книгопечатания такой метод идейной борьбы был весьма эффективен.

Методы, в которых использовалось понятие бесконечности, позволили греческим ученым получить ряд важных результатов, особенно в геометрии. Однако парадоксы Зенона приучили их к осторожности. Напрмиер, Евклид, формулируя свою знаменитую теорему о бесконечности множества простых чисел, выражается так: «Простых чисел существует больше всякого предположенного количества простых чисел». Итак, больше всякого предположенного количества, а бесконечно много или нет – об этом Евклид умалчивает. Вообще, древние греки с

такой тщательностью маскировали применение методов, в которых существенную роль играло понятие бесконечности, что в XVI – XVII веках европейским математикам пришлось эти методы переоткрывать.

Широкое использование бесконечности в математике с XVII века, когда был создан математический анализ. Такие понятия, как «бесконечно большая величина», «бесконечно малая величина», использовались в математических рассуждениях на каждом шаге. Однако в это время изучали не множества, содержащие бесконечно много элементов, а величины, которые в процессе своего изменения становятся все больше и больше, так что в конце концов они превосходят любое фиксированное значение.

И лишь в середине XIX века началось изучение множеств, состоящих из бесконечно большого количества элементов, приступили к анализу понятия бесконечности. Творцами математической теории бесконечных множеств были чешский ученый Бернард Больцано (основной труд которого был опубликован лишь много лет спустя после его смерти) и немецкий математик Георг Кантор. Этим замечательным ученым удалось преодолеть схоластику и превратить теорию множеств в важную часть математики.

Основным достижением Больцано и Кантора было изучение свойств бесконечных множеств, свойства конечных множеств были известны ученым и до них. Оказалось, что свойства конечных и бесконечных множеств совершенно непохожи друг на друга: многие вещи, невозможные для конечных множеств, легко выполняются для бесконечных.

3.2. Как сравнивать множества.

Для конечных множеств самой разно природы всегда можно сказать, какое из них содержит больше элементов, а какое меньше. Для бесконечных же множеств этот вопрос становится гораздо более сложным. Например, чего больше, натуральных чисел или рациональных, рациональных или действительных? Где больше точек, на отрезке или на всей прямой, на прямой или в квадрате?

На первый взгляд кажется, что ответить на эти вопросы совсем просто. Ведь множество натуральных чисел является частью множества рациональных чисел, а отрезок – частью прямой. Не ясно ли, что поэтому натуральных чисел меньше, чем рациональных, а точек на отрезке меньше, чем точек на всей прямой? Оказывается, не ясно. Ведь ниоткуда не следует, что при переходе к бесконечным множествам сохранятся законы, выведенные из рассмотрения конечных множеств, например, закон о том, что «часть меньше целого».

А самое главное, попытка сравнений бесконечных множеств по тому признаку, что одно является частью другого, заранее обречена на неудачу. Например, где больше точек, в квадрате или на всей бесконечной прямой? Ведь ни квадрат нельзя вложить в прямую линию, ни прямую линию нельзя, не ломая ее, поместить в квадрат. Разумеется, можно разломать прямую линию на отрезки, длина которых равна стороне квадрата, и после этого каждый отрезок поместить в

квадрат так, чтобы они не пересекались друг с другом. Но вдруг и квадрат можно как-то разбить на части, а потом эти части положить на прямую, чтобы они не задевали друг друга? А сколько есть бесконечных множеств, не являющихся частями друг друга! Множество квадратов на плоскости и множество кругов на той же плоскости не имеют ни одного общего элемента. Как же сравнить их? В первую очередь выясним, в каких случаях два бесконечных множества имеют «поровну» элементов.

Для конечных множеств задача сравнения решается просто. Чтобы узнать, одинаково ли число элементов в двух множествах, достаточно пересчитать их. Если получатся одинаковые числа, то, значит в обоих множествах поровну элементов. Но для бесконечных множеств такой способ не годится, ибо, начав пересчитывать элементы бесконечного множества, мы рискуем посвятить этому делу всю свою жизнь и все же не закончить начатого предприятия.

Итак, пусть у нас даны два множества A и B. Говорят, что между ними установлено взаимно однозначное соответствие, если элементы этих множеств объединены в пары (a; b) так, что:

1) Элемент a принадлежит множеству A, а элемент b – множеству B;
2) Каждый элемент обоих множеств попал в одну и только одну пару.

Например, если множество A состоит из юношей на танцплощадке, а множество B – из девушек на той же площадке, то пары (a; b) образуются из танцующих друг с другом юноши и девушки.

Разумеется, не всякое соответствие между множествами является взаимно однозначным. Если множество A состоит из всех деревьев на Земле, а множество B – из растущих на них плодов, то между этими множествами можно установить соответствие: каждому плоду сопоставить дерево, на котором он растет. Но это соответствие не будет взаимно однозначным: на некоторых деревьях растет помногу плодов, а другие сейчас не плодоносят. Поэтому одни элементы (деревья) будут участвовать во многих парах, а другие элементы не войдут ни в одну пару.

Существование взаимно однозначного соответствия для конечных множеств равносильно тому, что у них поровну элементов. Важнейшим поворотным пунктом в теории множества был момент, когда Кантор решил применить идею взаимно однозначного соответствия для сравнения бесконечных множеств.

Иными словами, по Кантору два (быть может и бесконечных) множества A и B имеют поровну элементов, если между этими множествами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Обычно математики не говорят, что «множества A и B имеют поровну элементов», а говорят, что «A и B имеют одинаковую мощность» или «множества A и B эквивалентны» и обозначают как $A \sim B$.

Таким образом, для бесконечных множеств слово «мощность» значит то же самое, что для конечных множеств «число элементов».

Еще до Кантора к понятию взаимно однозначного соответствия пришел чешский ученый Б. Больцано. Но он отступил перед трудностями, к которым вело это понятие. После принятия принципа сравнения бесконечных множеств с помощью взаимно однозначного соответствия пришлось расстаться со многими догмами.

3.3. Равна ли часть целому?

Основной догмой, которую пришлось отбросить, было положение, установленное на самой заре развития математики: «часть меньшего целого». Это положение безусловно верно для конечных множеств, но для бесконечных множеств оно уже теряет силу. Например, рассмотрим множество натуральных чисел и множество четных натуральных чисел.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & \dots \end{array}$$

Но эта схема устанавливает взаимно однозначное соответствие между этими двумя множествами.

1, 2, 3, …, n, …

И его частью – множеством четных чисел

2, 4, 6, …, 2n, …

А множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, содержат поровну элементов. Значит, множество натуральных чисел содержит столько же элементов, сколько и его часть – множество четных чисел.

Точно так же можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством вида 10, 100, 1000, 10 000, … Для этого надо сопоставить каждому натуральному числу n число 10^n: $n \longrightarrow 10^n$. Точно так же устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством всех квадратов натуральных чисел: $n \longrightarrow n^2$ или множеством всех кубов натуральных чисел: $n \longrightarrow n^3$ и т.д.

Вообще, между множеством всех натуральных чисел и любой его бесконечной частью всегда можно установить взаимно однозначное соответствие. Для этого достаточно перенумеровать по порядку числа из этой части.

3.4. Счетные множества.

Все множества, которые имеют столько же элементов, сколько имеет множество натуральных чисел, называют счетными. Иными словами, множество называется

счетным, если оно бесконечно, но его элементы можно перенумеровать натуральными номерами. Например, множество четных чисел, множество нечетных чисел, множество простых чисел, да и вообще любая бесконечная часть множества натуральных чисел являются счетными множествами.

Иногда для того, что установить счетность того или иного множества, надо проявить изобретательность. Возьмем, например, множество всех целых чисел (как положительных, так и отрицательных): …, -n, …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …, n, … Если мы попробуем нумеровать его по порядку, начиная с какого-нибудь места, то никогда эту нумерацию не закончим. Поэтому все числа до выбранного места останутся незанумерованными. Чтобы не пропустить при нумерации ни одного числа, надо записать это множество в виде двух строк:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …

-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, …

и нумеровать по столбцам. При этом – получит №1, -1 – №2, 1 – №3,-2 - №4 и т.д. Иными словами, все положительные числа и нуль нумеруются нечетными числами, а все отрицательные целые числа - четными.

Но если в то, что множество всех целых чисел счетно, легко поверить, то в счетность множества рациональных чисел поверить труднее. Ведь рациональные числа расположены очень густо – между любыми двумя рациональными числами найдется еще бесконечно много рациональных чисел. Сделаем так: выпишем сначала все положительные дроби со знаменателем 1, потом все положительные дроби со знаменателем 2, потом все положительные дроби со знаменателем 3 и т.д. У нас получится таблица следующего вида:

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \ldots$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \ldots$

$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$

$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots$

……..

Ясно, что в этой таблице мы встретим любое положительное рациональное число, и притом не один раз. Например, число 3 встретится и в виде дроби $\frac{3}{1}$, и в виде дроби $\frac{6}{2}$, и в виде дроби $\frac{9}{3}$.

Теперь приступим к нумерации. Воспользуемся нумерацией по квадратам, но некоторые дроби будем пропускать (например, так как $\frac{1}{1}$ получила уже №1, то дроби $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}$ и т.д. пропустим: они выражают то же самое число). Получится следующая нумерация положительных рациональных чисел: 1, 2, $\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 4, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$

Мы занумеровали, таким образом, все положительные рациональные числа. А теперь уже легко понять, как нумеруются все (то есть положительные и отрицательные) рациональные числа. Для этого надо записать их отдельно в

виде двух таблиц и числа одной таблицы нумеровать четными номерами, а второй – нечетными (и еще оставить один номер для нуля).

Вообще, складывая счетное множество счетных множеств, мы снова получим счетное множество. Это доказывается тем же самым приемом нумерации по квадратам.

3.5. Неравные множества.

Что значит «одно множество имеет больше элементов, чем второе». Для конечных множеств это можно выяснить, не прибегая к счету.

Устанавливаем взаимно однозначное соответствие между одним множеством и частью другого множества. Если это удается, то отсюда следует, что второе множество содержит больше элементов, чем первое. Пользуясь этим методом, легко установить, например, что рыб в океане меньше, чем атомов на земном шаре (хотя оба эти множества и конечны, их вряд ли возможно пересчитать). Для этого достаточно каждой рыбе поставить в соответствие один атом, входящий в состав ее тела. Тем самым будет установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех рыб и частью множества всех атомов на земном шаре.

К сожалению, для бесконечных множеств так просто поступить нельзя. Ведь мы уже видели, что множество может иметь столько же элементов, сколько и его часть. Поэтому только из того факта, что множество А имеет столько же элементов, сколько и часть множества В, еще нельзя заключить, что оно имеет меньше элементов, чем все множество В.

Если множество А можно поставить во взаимно однозначное соответствие с частью множества В, то множество В имеет не меньше элементов, чем множество А. Можно доказать, что это соотношение обладает всеми хорошими свойствами неравенств:

1) Каждое множество А имеет не меньше элементов, чем само это множество.
2) Если множество А имеет не меньше элементов, чем В, а В – не меньше элементов, чем С, то А имеет не меньше элементов, чем С.
3) Если множество А имеет не меньше элементов, чем В, а В – не меньше элементов, чем А, то они имеют поровну элементов (то есть между

элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие).

Может случиться, что множество B имеет не меньше элементов, чем множество A, но эти множества не эквивалентны. Иными словами, может случиться, что есть взаимно однозначное соответствие между множествами A и частью B_1 множества B, но не существует взаимно однозначного соответствия между A и всем множеством B. Вот в этом случае мы и будем говорить, что B имеет больше элементов, чем A.

3.6. Несчетные множества.

Все построенные до сих пор множества оказались счетными. Это наводит на мысль, а не являются ли вообще все бесконечные множества счетными? Выяснилось, что несчетные множества существуют, и притом с разными мощностями. Одно несчетное множество всем хорошо знакомо – это множество всех точек на прямой линии.

Доказать несчетность какого-то множества вообще нелегко. Ведь доказать, что какое-то множество счетно, это значит просто придумать правило, по которому нумеруются эти элементы. А доказать несчетность какого-то множества, это значит доказать, что такого правила нет и быть не может. Иными словами, какое бы правило ни придумали, всегда найдется незанумерованный элемент множества. Чтобы доказать несчетность множеств, Кантор придумал очень остроумный способ, получивший название диагонального процесса.

Докажем, что множество всех точек на прямой линии нечетно. Вместо этого множества можно говорить о множестве всех действительных чисел, так как каждой точке прямой соответствует действительное число и обратно.

Каждое действительное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби вида a, $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots\ \alpha_4 \ldots$ Некоторые из них имеют даже по две записи, например: 0,500000… и 0,49999999… - это одно и то же число. Для определенности будем пользоваться записью с нулями.

Предположим, что нам удалось каким-то образом перенумеровать все действительные числа. Чтобы доказать, что это предположение неверно, достаточно построить хоть одно незанумерованное число. Поступим следующим образом. Сначала напишем нуль и поставим после него запятую. Потом возьмем число, получившее первый номер, и посмотрим на его первый десятичный знак после запятой (то есть на число десятых). Если эта цифра отлична от 1, то в числе, которое мы пишем, поставим после запятой 1, а если эта цифра равна 1, то поставим после запятой 2. Затем перейдем к числу, получившему второй номер, и посмотрим на его вторую цифру после запятой. Снова, если эта цифра отлична от единицы, то в числе, которое мы пишем, поставим на месте сотых цифру 1, если же эта цифра является единицей, то поставим цифру 2. Точно так же будем действовать и дальше, каждый раз обращая внимание лишь на n-ю цифру числа, получившего n-й номер. В

результате мы выпишем некоторое число, например: N = 0,1121211… Ясно, что это число не получило никакого номера: в первом десятичном знаке оно отличается от числа с номером 1, во втором – от числа с номером 2, …, в n-ом – от числа с номером n и т.д.

Например, предположим, что при выбранной нумерации первые пять чисел имеют следующий вид:

4,27364…

-1,31226…

7,95471…

0,62419…

8,56280…

Тогда число, не получившее номера, будет начинаться со следующих десятичных знаков: 0,12121…

Разумеется, не только это, но и многие другие числа не получили номеров (мы могли бы заменять все цифры, кроме 2, на 2, а цифру 2 на 7 или выбрать еще какое-нибудь правило). Но нам достаточно существования одного-единственного числа, не получившего номера, чтобы опровергнуть гипотезу о возможности нумерации всех действительных чисел.

3.7. Где больше точек. Множества мощности континуума.

На очень коротком и очень длинном отрезках точек поровну! Иными словами, всегда можно установить взаимно однозначное соответствие между точками этих отрезков. Как это сделать, лучше всего видно из рисунка 12.

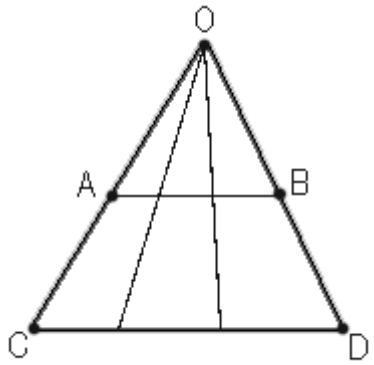

Рис.12

Трудно примириться с мыслью, что дорога длиной в миллион световых лет имеет столько же точек, сколько и радиус атомного ядра!

Но еще неожиданнее оказалось то, что даже на всей бесконечной прямой не больше точек, чем на отрезке, то есть что между множеством точек на прямой и множеством точек на отрезке можно установить взаимно однозначное соответствие.

Мы возьмем даже не весь отрезок, а выбросим из него концы (как говорят, возьмем не отрезок, а промежуток). Как установить взаимно однозначное соответствие между промежутком и прямой, видно из рис.13. Сначала точки промежутка отображают на полуокружность, а потом проектируют полуокружность на прямую. Ясно, что при этом каждой точке промежутка соответствует одна и только одна точка прямой, причем ни одна точка на прямой не пропущена.

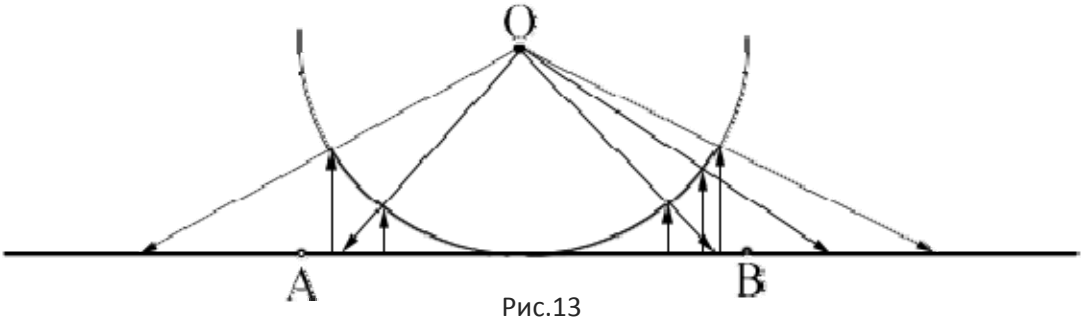

Рис.13

То же самое соответствие можно установить и по-другому, с помощью кривой – тангенсоиды, графика функции y = tg x.

С тем, что на бесконечной прямой столько же точек, сколько и на отрезке, математики, скрепя сердце, примирились. Но следующий результат Кантора оказался еще более неожиданным. В поисках множества, имеющего больше элементов, чем отрезок, он обратился к множеству точек квадрата. Сомнения в результате не было: ведь отрезок целиком размещается на одной стороне квадрата, а множество всех отрезков, на которые можно разложить квадрат, само имеет ту же мощность, что и множество точек отрезка.

На протяжении трех лет (с 1871 по 1874) Кантор искал доказательство того, что взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и точками квадрата невозможно.

Шли годы, а желанный результат не получался. И вдруг совершенно неожиданно ему удалось построить соответствие, которое он считал невозможным! Сначала он сам не поверил себе. Математику Дедекинду он писал: «Я вижу это, но не верю этому».

Но все же пришлось смириться с тем, что интуиция подвела и здесь, - в квадрате оказалось ровно столько же точек, сколько и на отрезке.

Возьмем отрезок [0; 1] и квадрат со стороной 1. Этот квадрат можно считать расположенным так, как на рис.14. Нам надо установить взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и квадрата.

Каждую точку T квадрата ABCD можно задать двумя числами – ее координатами x и y (или попросту ее расстояниями до сторон AD и AB). Эти числа можно записать как бесконечные десятичные дроби. Так как x и y не больше 1, то эти дроби имеют вид x = $0,\alpha_1\ \alpha_2\ldots\ \alpha_n\ldots$, y = $0,\beta_1\ \beta_2\ldots\ \beta_n\ldots$ (для простоты мы не берем точек квадрата, лежащих на его сторонах, а берем лишь

внутренние точки). Здесь α_n и β_n – десятичные знаки чисел x и y, например, если x = 0,63205… и y = 0.21357…, то $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$ и т.д., $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$ и т.д.

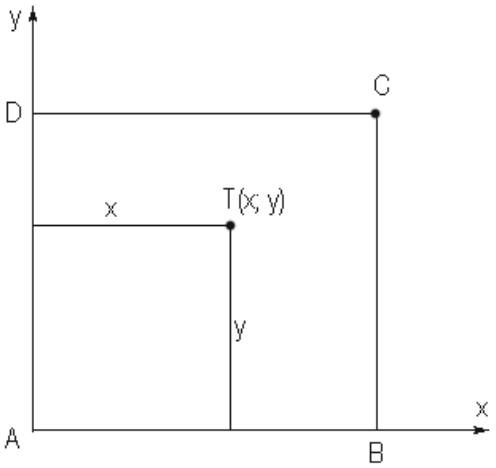

Рис.14

Нам надо теперь найти точку Q отрезка AB, соответствующую точке T. Достаточно указать длину отрезка AQ. Мы выберем эту длину равной числу z, десятичные знаки которого получаются путем «перетасовывания» десятичных знаков чисел x и y. Иными словами, сделаем из двух записей третью, написав их десятичные знаки через один: z = 0, $\alpha_1\ \beta_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \alpha_3\ \beta_3 \ldots \alpha_n\ \beta_n \ldots$ Например, если x = 0,515623…, y = 0.734856…, то положим z = 0,571354682536…

Точка z лежит на отрезке [0; 1], и ясно, что различным точкам квадрата соответствуют при этом разные точки отрезка. Ведь если точки T и T' не совпадают, то в десятичных записях чисел x и x' или y и y' хоть один знак будет разный. Но это приведет к тому, что десятичные записи соответствующих чисел z и z' не совпадут. Тогда не совпадают и сами эти точки.

Всех точек отрезка мы не получим. Например, точка z = 0,191919… должна была бы получиться из пары x = 0,111…, x = 0,999…, соответствующей точке на стороне квадрата, а такие точки мы условились не брать. Поэтому при отображении квадрата на отрезок точка z не будет образом ни одной точки квадрата.

Мы установили, таким образом, взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и частью точек отрезка. Но его мощность и не меньше, а потому эти мощности совпадают.

3.8. О перспективе.

Я рассказала о двух типах бесконечных множеств. Одни из них имеют столько же элементов, сколько и множество натуральных чисел, а другие – столько же, сколько и множество точек на прямой. Оказалось, что во втором множестве больше элементов. Естественно, возникает вопрос, а нет ли «промежуточного» множества, которое имело бы больше элементов, чем множество натуральных

чисел, и меньше, чем множество точек на прямой? Этот вопрос получил название *проблемы континуума.*

И еще. Пока что самой большой мощностью, которую я знаю, является мощность множества точек на прямой, то есть мощность континуума. Ни множество точек квадрата, ни множество точек куба не имеют большей мощности. Не является ли мощность континуума самой большой? Получить ответы на эти вопросы я смогу, изучая дальше теорию множеств.

Список литературы.

1) Н.Я.Виленкин, рассказы о множествах, Москва, МЦНМО, 2007.
2) Н.К.Верещагин, А.Шень, Начала теории множеств, Москва, МЦНМО, 2008.
3) Д.К.Фаддеев, Лекции по алгебре, С-Пб, Лань, 2007.