Удивительные функции и линии

Работу выполнила ученица 8 класса ГОУ СОШ № 448

Кобзарева Виктория

Руководитель: Кноп Л. С.

Вступление

В данной работе рассмотрены функции, имеющие какие-то необычные свойства. В процессе изучения этой темы возникли некоторые вопросы, связанные с графиками функций, поэтому заключительная часть работы посвящена линиям.

Первая глава - об определении функции.

Во второй главе представлены функции с самыми причудливыми свойствами:

- функция, которая во всех точках разрывна;
- непрерывная функция, имеющая на конечном отрезке бесконечно много максимумов и минимумов;
- непрерывная функция, которая возрастает на единицу, хотя растет только на множестве нулевой длины и не делает нигде скачков;
- функция, графиком которой является непрерывная линия, целиком состоящая из зубцов, изломов и колючек.

Третья глава посвящена линиям. В ней рассматриваются разные подходы к определению линии и некоторые необычные линии - кривая Пеано и ковер Серпинского. Также там содержатся ответы на такие интересные вопросы как: чем линия отличается от поверхности, что такое жордановы кривые и канторовы линии, что такое геометрическая фигура, может ли линия иметь площадь и существуют ли области, не имеющие обычной площади (неквадрируемые).

Глава I:

1.1. Понятие функции

Сложный путь прошло понятие функции. Идея зависимости некоторых величин восходит, по-видимому, к древнегреческой науке. Но там величины имели лишь геометрическую природу. Хотя фактически понятием функции пользовались уже Ферма и Декарт, сам термин «функция» возник лишь в 1694 году в работах немецкого ученого Лейбница, делящего с Ньютоном заслугу создания математического анализа. Однако, из-за возникавших противоречий, многие ученые переделывали понятие функции и дополняли его. В итоге более точное определение (которым мы пользуемся и сейчас) дал Дирихле: «Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому значению величины x соответствует единственное определенное значение величины y».

В дальнейшем к словам «каждому значению величины x» добавили слова «принадлежащему некоторому множеству» (ведь функция не обязательно определена для всех значений x).

Это определение было чрезвычайно общим, в нем ни слова не говорилось о том, что функция должна задаваться одной и той же формулой на всем отрезке, где она определена. Более того, она могла совсем не задаваться какой-то формулой, а определяться словами. Например, сам Дирихле рассмотрел такую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x - \text{иррациональное число}, \\ 1, \text{если } x - \text{рациональное число}. \end{cases}$$

С точки зрения математиков XVIII века, это определение не задавало никакой функции, ведь не было дано формулы, по которой можно вычислить эту функцию. Тем не менее это определение полностью задает функцию. (Теперь она называется функцией Дирихле.) Из него совершенно ясно, что, например,

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 1, \quad f(\sqrt{2}) = 0.$$

По сути дела, определение Дирихле(с указанным уточнением) было окончательным для числовых функций числового аргумента. Дальнейшее развитие состояло в том, что стали рассматривать функции, заданные на произвольных множествах и принимающие значения также на произвольных множествах. Именно, пусть даны два множества A и B, и пусть каждому элементу a множества A поставлен в соответствии элемент b множества B. Тогда говорят, что задана функция на множестве A со значениями в множестве B. В столь общей формулировке понятие функции сливается с понятием соответствия, отображения, преобразования.

Глава II:

2.1. Удивительные функции

Определение Дирихле позволило строить и изучать различные функции, не думая о том, существует ли единая формула, выражающая изучаемую функцию.

Необычной является уже сама функция Дирихле, о которой говорилось выше. Ведь на самом маленьком отрезке оси абсцисс бесконечно много и рациональных чисел, и иррациональных чисел. Но функция Дирихле для рациональных чисел равна единице, а для иррациональных – нулю. Поэтому, когда x пробегает ось абсцисс, то значение функции все время прыгает от 0 к 1 и обратно. Построить график этой функции совершенно невозможно, потому что она во всех точках разрывна.

Но и среди непрерывных функций есть функции с неожиданными свойствами. Например, может ли непрерывная функция иметь на конечном отрезке бесконечно много максимумов и минимумов? На первый взгляд это совершенно невозможно. Ведь функция должна успеть опуститься из точки максимума в точку минимума, потом опять подняться в точку максимума и т.д. Как ей сделать все это на конечном отрезке? Тем не менее оказалось, что такие странные функции существуют, причем построить их совсем нетрудно.

Построим такую функцию на отрезке $[0;1]$. Для этого разделим отрезок пополам и построим на левой половине равносторонний треугольник. Теперь разделим оставшуюся правую половину снова на две равные части $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$ построим второй равносторонний треугольник. Выполним описанную операцию бесконечно много раз. У нас получится

горная цепь, состоящая из бесконечного числа вершин, постепенно опускающаяся к точке 1. Примем полученную ломаную за график функции f(x). Тогда функция будет определена в каждой точке отрезка $[0;1]$, за исключением крайней правой точки 1. В этой точки положим f(1)=0.

Так как при приближении к точке 1 высоты вершин стремятся к нулю, полученная нами функция непрерывна во всех точках отрезка $[0;1]$. А число максимумов и минимумов на этом отрезке бесконечно велико!

Математику XVIII века, чтобы построить такую странную функцию, понадобилось бы долго комбинировать различные функции, прежде чем он догадался бы, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много максимумов и минимумов на отрезке $[0;1]$(рис. 1). Но функция с бесконечным числом максимумов и минимумов была лишь началом неприятностей, ожидавших математиков.

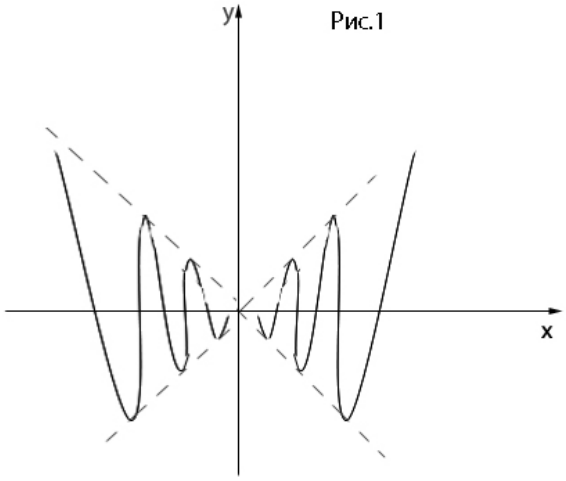

Рис.1

$y = x\cos\frac{\pi}{x}$

У функции (рис.1) есть лишь одна точка, около которой бесконечно много максимумов и минимумов, а именно точка 1. Сейчас мы построим такую функцию, у которой таких точек будет куда больше.

Предположим, что на отрезок $[0;1]$ оси абсцисс падает сверху дождь. Для защиты от дождя поступим следующим образом. Разделим отрезок $[0;1]$ на три равные части и возведем над средней частью палатку в форме равностороннего треугольника. Она защитит от дождя все точки средней части (кроме точек $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ – концов этой части). Теперь каждую из оставшихся двух частей снова разделим на три равные части и защитим средние части палатками той же формы (но втрое меньшего размера). У нас получится

линия, изображенная на рис. 2. На третьем шаге процесса мы построим еще четыре палатки, потом еще восемь и т.д.

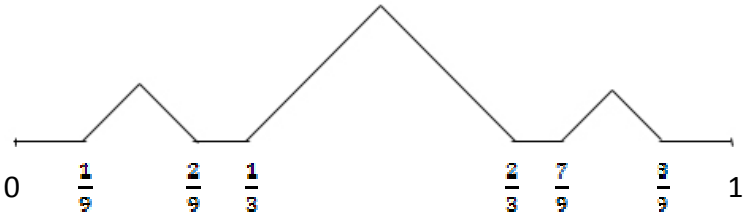

Рис. 2

Возникает вопрос: все ли точки отрезка защищены получившейся пилообразной линией или остались точки, которые дождь намочит? Некоторые из таких «мокрых» точек указать легко – ими являются концы защищаемых отрезков (то есть такие точки, как $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{8}{9}$ и т.д.). Все эти точки остаются без защиты при возведении соответствующей палатки, а последующие палатки их тоже не защищают. Легко видеть, что таких будет бесконечное, но все-таки счетное множество.

Но оказывается, что кроме этого счетного множества «мокрых» точек найдется еще целый континуум таких точек. Чтобы описать их, удобно прибегнуть к троичной системе счисления. Как известно, эта система строится так же, как и десятичная, только единица высшего разряда равна не десяти, а лишь трем единицам низшего разряда. Поэтому в троичной системе счисления для записи чисел вместо десяти цифр применяются лишь три цифры: 0, 1 и 2.

Легко научиться переводить числа из троичной системы счисления в десятичную. Например, число, записываемое в троичной системе так: 0,02020202…, в десятичной системе счисления изображается бесконечной геометрической прогрессией $\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\cdots$ Сумма этой прогрессии равна $\frac{1}{4}$. Поэтому $\frac{1}{4}$ = 0,02020202…

Теперь мы уже можем точно сказать, какие точки останутся мокрыми после того, как все защитные палатки будут построены. Первая палатка защищает точки, лежащие между $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Но это те самые точки, которые в троичной системе имеют запись вида 0,1…, где точками обозначена любая последовательность цифр 0, 1 и 2 (точно так же, как в десятичной системе счисления между точками $\frac{1}{10}$ и $\frac{2}{10}$ лежат все точки, десятичная запись которых начинается с цифры 1, то есть имеет вид 0,1…).

После первого шага мокрыми останутся точки, троичная запись которых имеет вид 0,0… или вид 0,2…

Точно так же доказывается, что после возведения двух палаток на втором шаге мокрыми остаются лишь точки, троичная запись которых начинается с одной из следующих четырех комбинаций: 0,00… , 0,02… , 0,20… , 0,22… . Итак, шаг за шагом защищаются от дождя точки , в троичную запись которых входят единицы. В конце концов

останутся мокрыми лишь точки, которые можно записать в троичной системе счисления, не используя 1. Например, останется мокрой точка $\frac{1}{4}$ = 0,02020202… , $\frac{3}{4}$ = 0,20202… и т.д.

А теперь уже ясно, почему множество «мокрых» точек имеет мощность континуума.

Множество точек, которые мы назвали мокрыми, впервые построил Кантор, и его называют *канторовым множеством*. Из построения палаток видно, что около каждой точки канторова множества есть бесконечно много максимумов и минимумов пилообразной линии.

2.2. Чертова лестница

С тем же самым канторовым множеством связана еще одна интересная функция. Она строится следующим образом. Снова разделим отрезок $[0; 1]$ на три равные части и положим, что во всех точках средней части наша функция равна $\frac{1}{2}$. Потом левую и правую трети снова разделим на три равные части и положим, что от $\frac{1}{9}$ до $\frac{2}{9}$ функция равна $\frac{1}{4}$, а от $\frac{7}{9}$ до $\frac{8}{9}$ она равна $\frac{3}{4}$.

Теперь у нас остались еще четыре отрезка, на которых функция еще не определена: $\left[0; \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}; \frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9}; 1\right]$. Разделим каждый из них на три равные части и на каждой из средних частей положим функцию равной соответственно $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$.

Продолжим этот процесс, мы получим функцию, которая определена во всех точках, не принадлежащих канторову множеству. Ее легко определить и в точках этого множества так, чтобы она стала после этого непрерывной и неубывающей. График получившейся функции приближенно изображен на рис. 3. Он имеет вид лестницы с бесконечным числом ступенек.

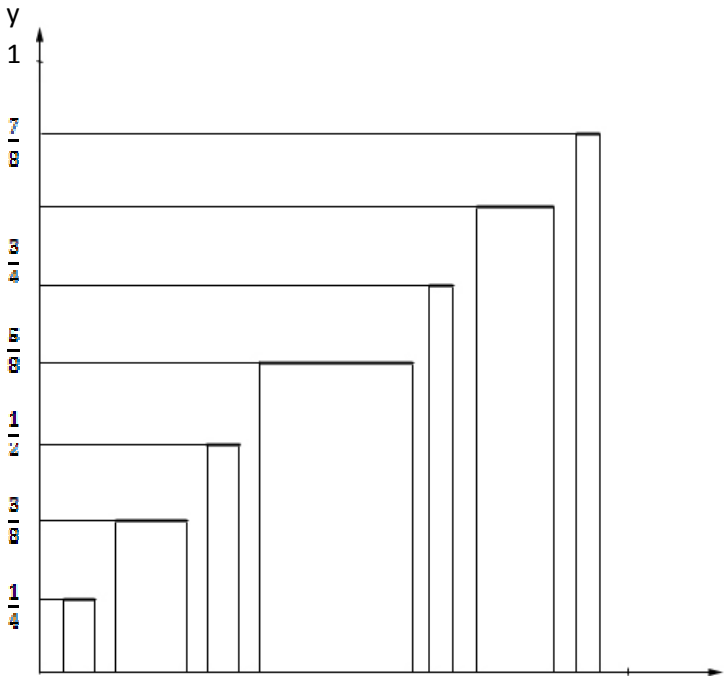

Рис. 3

$0 \quad \frac{1}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{1}{3} \qquad \frac{2}{3} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{8}{9} \quad 1 \quad x$

Посчитаем общую длину всех ступенек нашей лестницы. Она выражается бесконечной геометрической прогрессией $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}\ldots$ И сумма этой прогрессии равна $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1$. Таким образом, общая длина всех ступеней равна 1. Но на этих ступенях функция не поднимается вверх, весь ее подъем сосредоточен в точках канторова множества. А на долю этого множества осталось очень «мало» точек – хотя его мощность и равна континууму, но длина равна нулю! Ведь длина всего отрезка $[0;1]$ равна 1, и общая длина ступенек тоже равна 1, так что на долю канторова множества остается лишь нулевая длина. Таким образом, наша функция умудряется подняться вверх на 1, хотя растет только на множестве нулевой длины и не делает нигде скачков! Не правда ли, удивительно?

2.3. Колючая линия

На протяжении многих столетий математики имели дело лишь с линиями, почти в каждой точке которых можно было провести касательную. В течение долгого времени никто не верил, что может существовать непрерывная линия, целиком состоящая из зубцов, изломов и колючек. Велико было изумление математиков, когда удалось построить такую линию, более того, функцию, график которой был такой колючей изгородью. Первым сделал это чешский ученый Больцано. Именно о его примере я и расскажу.

Разделим отрезок $[0;1]$ на четыре равные части и над двумя средними частями построим равнобедренный прямоугольный треугольник (рис.4а). Получившаяся линия является графиком некоторой функции, которую обозначим через $y = f_1(x)$.

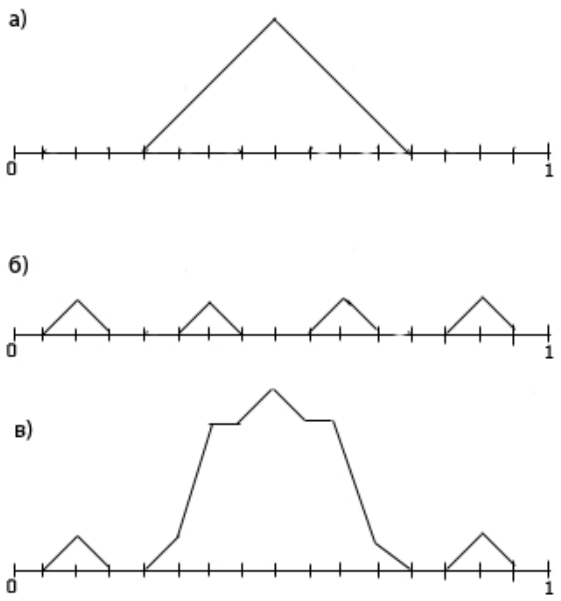

Рис. 4

Разделим теперь каждую из четырех частей еще на четыре равные части и в соответствии с этим построим еще четыре равнобедренных прямоугольных треугольника

(рис. 4б). Мы получим график второй функции $y = f_2(x)$. Если сложить эти две функции, то график суммы $y = f_1(x) + f_2(x)$ будет иметь вид, изображенный на рис. 4в. Видно, что получившаяся линия имеет уже больше изломов и эти изломы гуще расположены. На следующем шаге мы снова разделим каждую часть еще на четыре части, построим 16 равнобедренных прямоугольных треугольников и прибавим соответствующую функцию $y = f_3(x)$ к функции $y = f_1(x) + f_2(x)$.

Продолжая этот процесс, мы будем получать все более и более изломанные линии. В пределе получится линия, у которой излом в каждой точке, и ни в одной точке у ней нельзя провести касательную.

2.4. Линия бесконечной длины

С линиями бесконечной длины мы встречаемся часто – бесконечную длину имеет прямая линия, парабола, гипербола и т.д. И нетрудно построить линию, целиком лежащую в конечной части плоскости, но имеющую бесконечную длину. Для этого надо взять окружность и намотать на нее спираль с бесконечным числом оборотов вблизи окружности (рис.5). Так как число оборотов бесконечно, а длина каждого витка больше длины окружности, то длина всей спирали бесконечна.

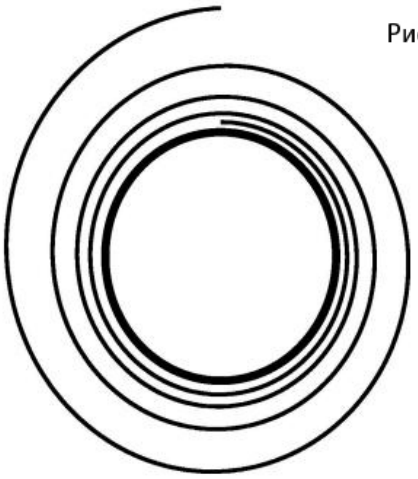

Рис. 5

Существуют и другие линии бесконечной длины. Например, построим линию так. Разделим отрезок $[0;1]$ пополам и на левой половине построим равнобедренный треугольник высоты 1. Потом разделим пополам отрезок $\left[\frac{1}{2};1\right]$ и на его левой половине $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$ построим равнобедренный треугольник высоты $\frac{1}{2}$. Следующий равнобедренный треугольник строится на отрезке $\left[\frac{3}{4};\frac{7}{8}\right]$ и тоже имеет высоту $\frac{1}{2}$; следующие четыре треугольника возьмем с высотой $\frac{1}{4}$ и т.д.

Получается медленно понижающаяся горная цепь. Ясно, что длины боковых сторон первого треугольника больше 1, второго и третьего – больше $\frac{1}{2}$, четвертого, пятого, шестого, седьмого – больше $\frac{1}{4}$ и т.д. (длины боковой стороны всегда больше высоты).

Поэтому длины всей ломаной не меньше, чем сумма бесконечного ряда $2+\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{2}\right)++\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\right)+\cdots$

Но сумма чисел в каждой скобке равна 2,а число скобок бесконечно. Поэтому сума ряда равна бесконечности. Значит, и длина нашей линии бесконечна.

Глава III

3.1. Линия или поверхность

Относительно таких геометрических фигур, как квадрат или окружность, ни у кого не возникает сомнений, линии они или поверхности. В ходе развития науки после открытий Кантора появилось много самых причудливых геометрических фигур, относительно которых даже умудренный знаниями профессор математики не сразу ответит, что это такое – линия, поверхность или тело.

Вот некоторые из этих фигур. Возьмем отрезок $[0;1]$, разделим его пополам и восставим в середине отрезка перпендикуляр длины $\frac{1}{2}$. Теперь каждую из половин разделим снова пополам и в каждой новой точке деления проведем перпендикуляр, но теперь уже длины $\frac{1}{4}$. Дальше снова разделим получившиеся отрезки пополам и проведем в точках деления перпендикуляры длины $\frac{1}{8}$. После пятого шага получим фигуру, изображенную на рис.6. Повторим операцию бесконечно много раз. В результате получится некоторая геометрическая фигура. Так вот, чем же она является, линией или поверхностью? Ведь мы провели бесконечно много перпендикуляров. Не сольются ли они и не заполнят ли маленький кусок поверхности около отрезка $[0;1]$? Ответ на этот вопрос не слишком легок.

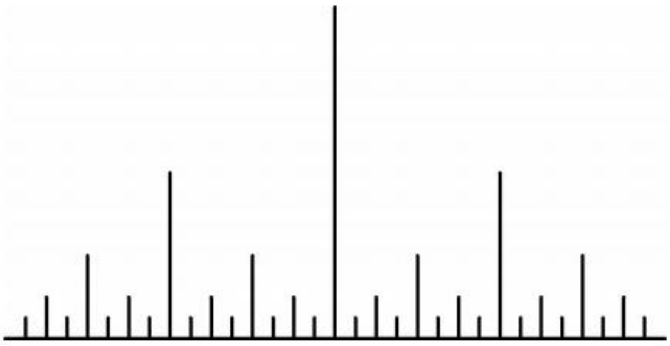

Рис. 6

А вот другой пример. Возьмем квадрат со стороной 1, разделим его на 9 равных частей и выкинем среднюю часть (оставив стороны выбрасываемого квадратика). После этого разделим каждый из оставшихся квадратов снова на девять равных квадратиков еще меньшего размера и снова выкинем центральные квадратики. Еще один шаг приведет к фигуре, изображенной на рис.7 (здесь заштрихованны выброшенные квадратики). Ясно, что эта фигура явлется еще поверхностью. Но мы не остановимся на третьем шаге и будем бесконечно много раз делить квадратики на девять равных частей, после чего

выбрасывать среднюю часть. В конце концов у нас получится некая геометрическая фигура, которую называют *ковром Серпинского* по имени придумавшего ее польского ученого.

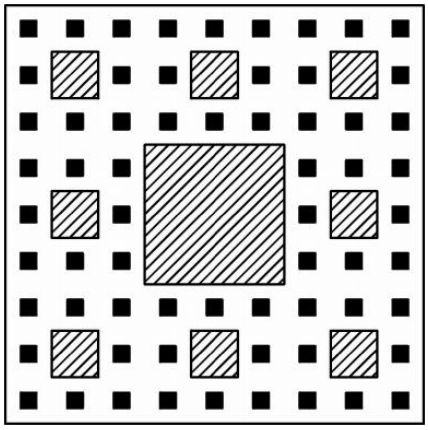
Рис. 7

Совсем неясно, чем является этот ковер – линией или поверхностью? Ведь, с одной стороны, он не содержит ни одной целой части, а потому вряд ли является поверхностью, а с другой – образующие его нити сплелись в настолько сложный узор, что вряд ли кто-нибудь без колебаний назовет ковер Серпинского линией. Во всяком случае нарисовать эту «линию» было бы невозможно.

3.2. Что такое линия?

Для того, чтобы дать строгое определение линии, надо было исходить из тех наглядных образов, которые привели к созданию этого математического понятия: длинных и тонких нитей, лучей света, длинных и узких дорог. Во всех этих случаях длина настолько больше ширины, что шириной можно пренебречь. В результате математической идеализации мы и приходим к понятию линии, не имеющей ширины.

Первым попытался дать строгое определение линии французский математик Камилл Жордан. Для того чтобы задать положение движущейся точки, надо задать ее координаты в каждый момент движения. Так как движение продолжается какой-то конечный промежуток времени, то, не теряя общности, можно считать, что этим промежутком является $[0; 1]$. Иными словами, точка начинает двигаться в некоторый момент времени, принимаемый за начало отсчета, и кончает движение по истечении некоторой единицы времени. В каждый момент времени t в течение этого промежутка задаются координаты движущейся точки. Таким образом, координаты точки зависят от момента времени t, являются его функциями. Обозначим эти функции (для случая, когда движение точки происходит в одной плоскости) через f(t) и g(t): x = f(t), y = g(t). Условие, что точка движется непрерывно, означает, что функции f(t) и g(t) непрерывны в каждой точке отрезка $[0; 1]$. Грубо говоря, при малом изменении t функции f(t) и g(t) должны мало изменяться. Точнее, если t_1, …, t_n, приближаются к некоторому значению t.

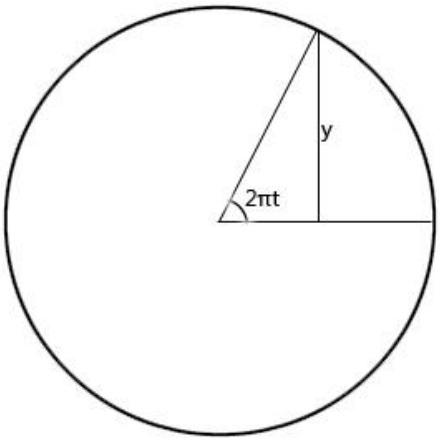

Рис. 8

Определение Жордана оказалось довольно удачным. Все линии, с которыми математики в то время имели дело, оказались кривыми в смысле Жордана, или, как говорят, *жордановыми кривыми*. Возьмем, например, окружность радиуса 1. Длина этой окружности равна 2π. Поэтому, чтобы обежать окружность за единицу времени, точка должна двигаться со скоростью 2π. Из рис. 8 ясно, что ее координаты в момент времени t задаются формулами $x = \cos 2\pi t,\ y = \sin 2\pi t$. Эти уравнения называют параметрическими уравнениями окружности. А для линии, изображенной на рис. 9 (ее называют астроидой), параметрические уравнения имеют следующий вид:

$$x = \cos^3 2\pi t, \quad y = \sin^3 2\pi t.$$

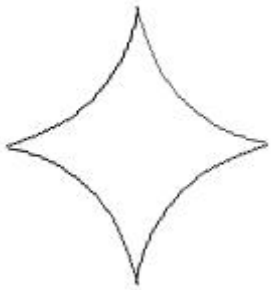

Рис. 9

Жордановыми линиями могут быть и линии, составленные из различных кривых. Возьмем, например, контур полукруга, состоящий из полуокружности радиуса 1 и диаметра. Движущаяся точка пробегает за половину времени полуокружность, а за вторую половину времени – диаметр. Выражения для координат при движении по окружности мы уже знаем. При движении же по диаметру y остается равным нулю, а x меняется от -1 до 1. В результате получаем следующие параметрические уравнения контура:

$$x = \begin{cases} \cos 2\pi t, \text{ если } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 4t - 3, \text{ если } \frac{1}{2} \le t \le 1; \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \sin 2\pi t, \text{ если } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 0, \text{ если } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

3.3. Кривая

Жордан доказал следующую теорему. Замкнутая жорданова кривая, не имеющая точек самопересечения, разбивает всю плоскость на две части. Две точки, принадлежащие одной и той же части, можно соединить ломаной, не пересекающей кривую, а точки из разных частей нельзя соединить такой ломаной, любая соединяющая их ломаная пересекает эту кривую.

Эта теорема кажется совершенно очевидной. Однако ее доказательство потребовало очень тонких рассуждений. Даже в случае, когда линия является замкнутым многоугольником, доказательство кажется очень сложным.

Две части, на которые замкнутая жорданова линия разбивает плоскость, называют внутренней и внешней областями, ограниченными этой линией, приобрело точный смысл.

Когда Жордан дал свое определение кривой, то сначала казалось, что цель достигнута, получено строгое определение понятия линии, не опирающееся на наглядность. Но вскоре оказалось, что это не так. Доказал это итальянский математик Пеано. Ведь нельзя назвать линией квадрат, а в смысле Жордана и треугольник, и квадрат, и круг являются линиями.

Я уже рассказывала, что Кантор установил взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и квадрата, то есть показал, что на отрезке ровно столько же точек, сколько и на квадрате. Это соответствие не было непрерывным. Когда точка двигалась по отрезку, соответствующая ей точка на квадрате не «ползла», а «прыгала». Таким образом, канторово отображение отрезка на квадрат не давало жордановой кривой. Пеано удалось построить другое отображение множества точек отрезка на множество точек квадрата, при котором близким точкам на отрезке соответствовали близкие точки квадрата. Иными словами, Пеано удалось построить кривую линию (в смысле Жордана), которая прошла через все точки квадрата!

Разумеется, мы не можем нарисовать кривую Пеано, поэтому последуем примеру физика Перрена и будем изображать положение движущейся точки прямолинейными отрезками. Чем меньше будут промежутки времени между отдельными наблюдениями, тем точнее получившаяся ломаная изобразит кривую Пеано.

Сначала будем отмечать положение движущейся точки через каждые $\frac{1}{4}$ с. Иными словами, отметим ее положение в начале движения, через $\frac{1}{4}$ с после начала движения, через $\frac{1}{2}$ с после начала движения, через $\frac{3}{4}$ с и в конце движения. Мы получим 5 точек. Соединив их, получаем линию.

Разумеется, эта линия не проходит через все точки квадрата. Но мы уменьшим промежутки времени между отдельными наблюдениями и будем отмечать положение

точки каждые $\frac{1}{16}$ с. Линия станет более извилистой, увеличится число изломов. Если еще чаще отмечать положение движущейся точки, то получим линию, изображенную на рис. 10. Мы видим, что линия все плотнее и плотнее заполняет квадрат, все ближе и ближе подходит к каждой его точке. В пределе, если все время наблюдать за движущейся точкой, мы получим линию, проходящую через все без исключения точки квадрата.

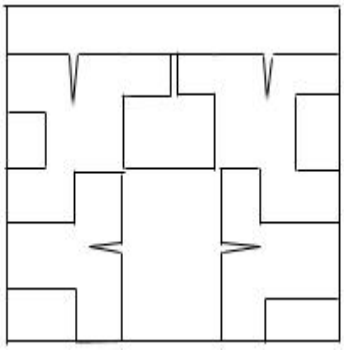

Рис. 10

Надо отметить, что, выиграв по сравнению с Кантором в том, что его линия оказалась непрерывной, Пеано потерял в другом. Его линия уже не задавала взаимно однозначного отображения отрезка на квадрат. Через некоторые точки квадрата она проходила по нескольку раз. Позже было доказано, что невозможно сохранить одновременно и непрерывность и взаимную однозначность соответствия: не существует жордановой кривой, проходящей через все точки квадрата в точности по одному разу.

Стало ясно, что жорданово определение кривой не безупречно. С одной стороны, оно слишком широко: под это определение подходит и кривая Пеано. А с другой стороны, оно слишком узко: не все образы, которые интуитивно хотелось бы отнести к линиям, подходит под это определение. Обнаружили и другой, глубже скрытый недостаток определения Жордана – ведь в этом определении шла речь не только о кривой, но и о том, в каком темпе и как пробегает ее точка. Представим себе, например, бегуна, который первую половину окружности проходит за $\frac{1}{4}$ мин, а потом, устав, проходит вторую половину окружности за $\frac{3}{4}$ мин. Ясно, что в этом случае мы получим совсем другие параметрические уравнения.

А ведь точка может пробегать окружность бесчисленным множеством способов, то ускоряя, то замедляя движение. Поэтому для одной и той же окружности получатся различные параметрические уравнения. И весьма трудно догадаться, что уравнения

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

задают ту же самую окружность, что и уравнения

$$x = \cos 2\pi t, \qquad y = \sin 2\pi t.$$

А с более сложными кривыми совсем легко запутаться. Возьмем, например, лемнискату. Эту кривую можно обойти разными способами. И выяснить, глядя на уравнения, одинаковы кривые или различны, весьма трудно.

Итак, снова встал вопрос, что же такое линия и чем она отличается от поверхности? Ответ на него был связан с общими исследованиями Кантора о геометрических фигурах.

3.4. Геометрическая фигура

Создав теорию множеств, Кантор перешел к вопросу о том, что такое геометрическая фигура? Самый общий ответ на этот вопрос гласил: геометрическая фигура – это любое множество точек пространства. Если это множество лежит на плоскости, то получается плоская геометрическая фигура. Но такой ответ был бы слишком общим – у фигур в этом смысле нет почти никаких достаточно интересных свойств.

Поэтому надо было в первую очередь ограничить совокупности изучаемых множеств, выделить из них те, которые ближе всего по своим свойствам к обычным геометрическим фигурам.

Чтобы выделить такой класс фигур, выясним, что общего имеют друг с другом обычные фигуры, такие, как квадрат, круг, отрезок прямой и т.д. Оказывается, все эти фигуры можно получить единообразным процессом.

Рассказывают, что знаменитый скульптор Роден на вопрос, как ему удается делать свои замечательные статуи, ответил: «Я беру глыбу мрамора и отсекаю от нее все лишнее». Тем же самым способом можно получить любую ограниченную плоскую геометрическую фигуру. Однако отсекать надо не сразу, а постепенно, на каждом шаге отбрасывая кусочек, имеющий форму круга. При этом сам круг выбрасывается, а его граница – окружность – остается в фигуре.

Отбрасывают не один и не два круга, а счетное множество кругов. А с помощью счетного множества вырезаний можно получить любую фигуру. Для этого следует поступить так: взять все круги, у которых обе координаты центра и радиус рациональны. И множество таких кругов счетно. А теперь выбросим из плоскости все круги нашего множества, внутри которых нет ни одной точки геометрической фигуры.

Ясно, что после этого останется только сама эта геометрическая фигура. Впрочем, не обязательно выбрасывать круги. Вместо них можно удалять квадраты, прямоугольники, эллипсы, соблюдая лишь одно условие – внутренние точки отбрасываются, а граничные остаются.

3.5. Континуумы

Оказывается, что кроме обычных геометрических фигур с помощью выбрасывания счетного множества кругов (квадратов и т.д.) можно получать и другие множества, не слишком похожие на обычные фигуры, но все же обладающие многими интересными свойствами. Например, ковер Серпинского получается именно таким путем: из квадрата

со стороной 1 выбрасывают один за другим маленькие квадратики, причем их стороны остаются.

Однако путем выбрасывания можно получить и фигуры, не состоящие из одного куска. Например, если удалять «кресты», то получится множество, не содержащее ни одного целого куска (как говорят, *вполне несвязное*). Поэтому введем ограничение, что после каждого выбрасывания должно оставаться множество, состоящее из одного куска. Тогда и после всех выбрасываний останется множество из одного куска (то есть *связное*). Кроме того, получающееся множество ограничено, то есть целиком лежит в некотором квадрате.

Итак, рассматриваемые множества удовлетворяют следующим условиям:

1) Множество F получается из квадрата выбрасыванием счетного множества кругов (квадратов и т.д.) с оставлением их границ;
2) Множество F состоит из одного куска (связно).

Эти множества Кантор и назвал *континуумами* (латинское слово «continuum» означает «непрерывное»). Континуумы и оказались наиболее общими множествами, свойства которых очень близки к свойствам обычных геометрических фигур.

3.6. Канторовы линии

Теперь уже можно ответить на вопрос, что же такое плоская линия. Так как плоские линии должны быть геометрическими фигурами, то ясно, что искать их надо среди континуумов. Но континуумами являются и круг, и квадрат, а эти фигуры никак не назовешь линиями. Поэтому надо добавить еще какое-то условие, которое отмело бы такие фигуры.

Заметим, что и круг, и квадрат содержат сплошные куски плоскости. А линии сплошных кусков плоскости не содержат; какой бы маленький квадратик мы ни взяли, всегда на нем найдутся точки, не принадлежащие линии. Вот это и является нужным нам дополнительным условием: плоской линией в смысле Кантора называют лежащий на плоскости континуум, не заполняющий ни одного сплошного куска плоскости (то есть такой, что в каждом квадрате есть точки, не принадлежащие этой линии).

Вообще все фигуры, являющиеся линиями в наглядном, наивном понимании, являются линиями и в смысле Кантора. А фигуры, содержащие хоть один целый кусок плоскости, не относятся к числу канторовых линий. Но и среди канторовых линий есть такие, что их свойства совершенно непохожи на свойства обычных линий. Сейчас я расскажу о некоторых таких линиях.

3.7. Всегда ли площадь линии равна нулю?

Интересно, может ли линия иметь площадь? Прежде чем исследовать этот вопрос, надо договориться о точном смысле употребляемых слов. Что значат слова «линия имеет нулевую площадь» или «линия имеет ненулевую площадь»?

Слова «линия имеет нулевую площадь» означают, что, какое бы маленькое положительное число ε мы не взяли, найдется многоугольная область, содержащая линию и такая, что площадь области меньше чем ε. А если хоть для одного положительного ε такой области не удастся найти, тогда площадь линии не равна нулю.

Чтобы это определение стало яснее, применим его не к таким простым линям, как отрезок или окружность, а к более сложным. Одной из таких линий является, конечно, ковер Серпинского. Найдем, чему равна его площадь. Для этого вспомним, что площадь всего квадрата была равна 1. На первом шаге мы выбросили центральный квадрат, имевший площадь $\frac{1}{9}$. В результате получилась многоугольная область с площадью $\frac{8}{9}$. На втором шаге мы выбросили 8 квадратиков, каждый из которых имел площадь $\frac{1}{81}$. После этого осталась многоугольная область $\frac{8}{9}-\frac{8}{81}=\frac{64}{81}=\frac{8^2}{9^2}$. Теперь уже ясно, что после третьего шага останется многоугольная область с площадью $\frac{8^3}{9^3}$, потом с площадью $\frac{8^4}{9^4}$ и т.д. Но если взять любую правильную дробь и возводить ее во все большую и большую степень, то в пределе получим нуль. Но это означает, что для любого ε > 0 найдется такое n, для которого $(\frac{8}{9})^n < \varepsilon$. Следовательно, после n шагов у нас получится многоугольная область, площадь которой меньше чем ε. А эта область целиком накрывает ковер Серпинского. Выходит, площадь ковра Серпинского равна нулю.

Но ведь никто не заставлял нас выбрасывать такие большие куски. Поступим более экономно и разделим квадрат не на 9, а на 25 равных частей (то есть каждую сторону разделим на 5 частей). Выбросим центральный квадратик, площадь которого равна, очевидно, $\frac{1}{25}$ (рис. 11). Теперь, вероятно, хочется разделить каждый из оставшихся 24 квадратиков на 25 частей и выбросить центральную часть. Но это было бы опять неэкономно. Вмсето этого возьмем отрезки, ограничивающие выброшенный квадратик, и продолжим их до пересечения со сторонами большого квадрата. У нас получится 4 квадрата (по углам) и 4 прямоугольника. В каждом квадрате и каждом прямоугольнике проведем кресты с шириной перекладин $\frac{1}{25}$ и выбросим центральные части крестов. Так как площадь каждой центральной части равна $\frac{1}{625}$, то площадь всех квадратиков, выброшенных на втором шаге, равна $\frac{8}{625}$. На третьем шаге точно так же выбрасываем 64 квадратика с общей площадью $\frac{64}{25^3}=\frac{64}{15625}$и т.д. Теперь уже площади выбрасываемых квадратиков образуют геометрическую прогрессию $\frac{1}{25}+\frac{8}{25^2}+\frac{64}{25^3}+\cdots$ со знаменателем $\frac{8}{25}$. Сумма этой прогерссии равна лишь $\frac{1}{17}$. Но что это означает? А это означает, что на каждом шаге на долю остатка приходится площадь не меньше чем $\frac{16}{17}$. И никакой многоугольной областью, площадь которой меньше $\frac{16}{17}$, покрыть остаток не удастся. А ведь этот остаток является кривой (в смысле Кантора).

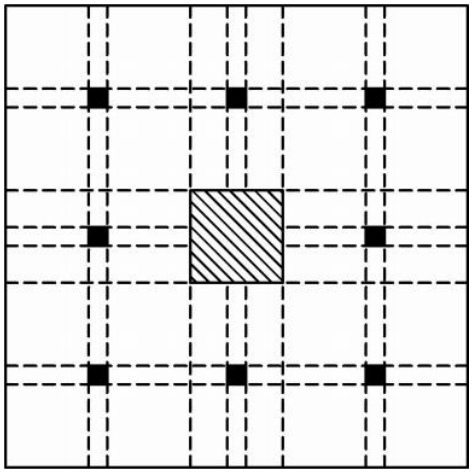
Рис.11

Выходит, таким образом, что кривая в смысле Кантора может иметь ненулевую площадь!

3.8. Области без площади

Все же разобранный пример еще не слишком убедителен: полученная линия сплошь состоит из точек самопересечения и не ограничивает никакой области. Поэтому возникает вопрос, а может ли «хорошая» кривая, не имеющая точек самопересечения, то есть замкнутая жорданова кривая без самопересечений, иметь ненулевую площадь? Оказывается, может!

Чтобы построить такую кривую, изменим немного проводившиеся построение. Сначала построим множество, в котором не только что целого куска плоскости, а и целого куска линии не найдешь, но площадь которого не равна нулю. Для этого надо выбрасывать не только центральные квадратики, а целые кресты. При этом размеры крестов подберем так, чтобы площадь первого выброшенного креста была равна $\frac{8}{26}$, всех крестов, выброшенных на втором шаге, $-\frac{64}{676}=\left(\frac{8}{26}\right)^2$, на третьем $-\left(\frac{8}{26}\right)^3$ и т.д. Тогда общая площадь выброшенных крестов будет равна сумме геометрической прогрессии $\frac{8}{26}+\left(\frac{8}{26}\right)^2+\left(\frac{8}{26}\right)^3+\cdots$, то есть $\frac{8}{17}$. А это меньше половины площади всего квадрата. Значит, на долю остатка приходится еще $\frac{9}{17}$ площади всего квадрата. Но при построении остатка мы выбрасывали целые кресты, безжалостно кромсая квадрат. Никакие две точки этого остатка нельзя соединить линией, даже линией в смысле Кантора; всякая связь между его точками отсутствует. Как говорят математики, остаток является вполне несвязным множеством. А площадь этого множества, не содержащего ни целого куска плоскости, ни дуги кривой, отлична от нуля; никакой многоугольной областью, площадь которой меньше $\frac{9}{17}$, это множество не накроешь.

Теперь уже легко построить пример несамопересекающейся замкнутой кривой, имеющей ненулевую площадь. Для этого нужно соединить полученные точки точно так же, как мы проводили кривую через все точки квадрата. Из-за того, что на каждом шаге

мы выбрасывали целые кресты, получающаяся линия не имеет самопересечений. Но так как она проходит через все точки множества, площадь которого по крайней мере равна $\frac{9}{17}$, то и площадь полученной линии по крайней мере равна $\frac{9}{17}$.

Теперь уже ничего не стоит построить область, не имеющую площади. Для этого надо соединить точки A и B полученной кривой какой угодно линией, например полуокружностью. Тогда полученная линия ограничивает какую-то область G. Чему же равна ее площадь? Ответ получится разный в зависимости от того, присоединим мы к этой области ее границу или нет – ведь сама граница имеет площадь, по крайней мере равную $\frac{9}{17}$. Ясно, что обычной площади наша область не имеет. Такие области, не имеющие обычной площади, в математике называют *неквадрируемыми*.

Оглавление

Глава I

Понятие функции_____ 1

Глава II

2.1. Удивительне функции _____ 2

2.2. Чертова лестница_____ 3

2.3. Колючая_____ 6

2.4. Линия бесконечной длины_____ 7

Глава III

3.1. Линия или поверхность_____8

3.2. Что такое линия?_____ 9

3.3. Кривая_____11

3.4. Геометрическая фигура_____13

3.5. Континуумы_____13

3.6. Канторовы линия_____ 14

3.7. Всегда ли площадь линии равна нулю?_____ 14

3.8. Области без площади_____16

Литература

1) Александров П.С. «Введение в теорию множеств и общую топологию» Лань, 2010г.
2) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. «Элементы теории функций и функционального анализа», Физматлит, 2006г.
3) Натансон Н.П. «Теория функций вещественной переменной», Лань, 2008г.
4) http://uztest.ru/abstracts/?idabstract=531211 (дата обращения 10.11.10)
5) http://www.neuch.ru/referat/37515.html (дата обращения 20.12.10)